Capítulo 1

NÚMEROS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS

Ciertos conjuntos de números tienen nombres especiales. Los números 1, 2, 3, y así sucesivamente, forman el conjunto de los números **naturales** y los simbolizamos con la letra $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$

Los números naturales junto con el cero y los enteros negativos constituyen el conjunto de los **enteros** que los simbolizamos con la letra $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

El conjunto de los números **racionales** está conformado por números que pueden escribirse como una razón (cociente) de dos enteros. Se los simboliza con la letra $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\Big/ p\in\mathbb{Z}\wedge q\in\mathbb{Z}\wedge q\neq 0\right\}$

Los números **irracionales** son aquellos que no pueden escribirse como un entero dividido entre un entero y tienen infinitas cifras decimales que no se repiten. Son ejemplos de estos números $\pi, \sqrt{2}$ y el número ***e***.

Los racionales y los irracionales forman el conjunto de los números **reales** los cuales se simbolizan con la letra $\mathbb{R}$. Pueden representarse por puntos en una recta. A cada punto sobre la recta le corresponde un número real único y a cada número real le corresponde un punto único de la recta. Por esta razón decimos que hay una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y los números reales.

Ejercicio N°1:

Resuelva

a) $-(6-4)+25:[(-8)+3]+(3-5-14):-(1+1)=$

b) $-[2\cdot 6+7\cdot(-3)]-\{(16+17):[8\cdot(7:7)+4\cdot(-7)+23]\}=$

c) $\frac{7}{8}:\frac{21}{4}+\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=$

d) $\left[\frac{2}{5}:(-4)\right]:\left\{\left[-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\frac{4}{27}\right\}=$

e) $\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(-\frac{24}{5}\right)+\frac{7}{15}:\frac{1}{5}+2=$

f) Una persona corre una carrera de 48 kilómetros en cuatro etapas. En la primera etapa corre 3/8 del total; en la segunda etapa corre 1/6 del total y en la tercera etapa corre 5/12 del total. ¿Cuántos kilómetros corre en la cuarta etapa?

g) ¿A qué precio debe venderse un producto si su costo es de $300 y quiere obtenerse une 23% de ganancia?

h) ¿Cuánto debe pagar un contribuyente cuyo impuesto es del 5% del valor de su bien valuado en $250.000?

i) Entre tres personas deben repartirse $15.000. La primera se lleva 7/15 del total; la segunda, 3/10 del total y la tercera, el resto. ¿Cuánto dinero se ha llevado la tercera persona?

Cuando decimos que **y** es el logaritmo base ***b*** de **x** queremos decir que ***b*** elevado a la potencia **y** es igual a **x**. Esto es $y = \log_b x$ significa que $b^y = x$. En este sentido, *un logaritmo de un número es un exponente*: $\log_b x$ es la potencia a la cual debe elevarse ***b*** para obtener **x**. Por ejemplo, $\log_2 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$.

Propiedades de los logaritmos:

- $\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$ Esto es, el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores.
- $\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$ Esto es, el logaritmo de un cociente es la diferencia del logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.
- $\log_b n^m = m \cdot \log_b n$ Por lo que el logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base.
- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$

Ejercicio N°2:

Resuelva aplicando propiedades

a) $\log_4 \frac{4}{64} =$

b) $\log_3 \left(\frac{1}{9} \cdot 243 \cdot 1 \right) =$

c) $\log_5 \left(\frac{1}{125} \right)^3 =$

El producto de un número $\boldsymbol{a}$ multiplicado tres veces, $a \cdot a \cdot a$, se escribe a^3. En general, para un entero positivo $\boldsymbol{n}$, llamamos **potencia enésima** a^n al producto de $\boldsymbol{n}$ factores, cada uno de los cuales es $\boldsymbol{a}$. La letra $\boldsymbol{a}$ se denomina base y la letra $\boldsymbol{n}$ se llama exponente. Así:

$$a^{-4} = \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a} \qquad \frac{1}{a^{-4}} = a^4$$

$a^0 = 1$ si $a \neq 0$

Se denomina **raíz enésima** $\sqrt[n]{a}$ al número $\boldsymbol{b}$ que elevado a la $\boldsymbol{n}$ da de resultado $\boldsymbol{a}$, si $a > 0$. Es decir $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$. El signo $\sqrt{\ }$ se denomina radical, $\boldsymbol{n}$ es el índice y $\boldsymbol{a}$ es el radicando.

Si $a < 0$ y $\boldsymbol{n}$ es impar, entonces $b < 0$. Por ejemplo: $\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8$.

Si $a > 0$ la expresión $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son enteros y $\boldsymbol{m}$ es positiva. Por ejemplo: $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

A continuación, se presentan algunas propiedades de la potenciación y de la radicación:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ **Ejemplo:** $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

$\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ **Ejemplo:** $\dfrac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2$

$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ **Ejemplo:** $\left(2^2\right)^5 = 2^{2 \cdot 5} = 2^{10}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ **Ejemplo:** $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ **Ejemplo:** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4}$

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ **Ejemplo:** $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ **Ejemplo:** $\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}} = \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ **Ejemplo:** $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} = \sqrt[3 \cdot 3]{512} = \sqrt[9]{512}$

Ejercicio N°3:

Resuelva aplicando propiedades cuando corresponda:

a) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^7 + \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

b) $\sqrt{2-\frac{7}{4}}+\left(\frac{7}{4}\right)^{0}-\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=$

c) $(1+3)^{2}-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{3}+\left(-\frac{5}{2}\right)^{3}=$

d) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{-1}}+\sqrt[3]{64\cdot 8}-\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}\right)^{-2}=$

La **racionalización del denominador** de una fracción es un procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin radical en su denominador. Por ejemplo:

$$\frac{20}{\sqrt{5}}=\frac{20}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^{2}}=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$$

Ejercicio N°4:

Resuelva

a) $\sqrt{\frac{10^2-2^6}{3^3-2^5:2^4}}-4^{-\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{125}}=$

b) $\left[6^{0}+\sqrt{\frac{5^{2}-2^{5}-log_{5}25}{-2^{3}-4^{-3}\cdot 4^{3}}}\right]^{5}-\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}=$

c) $7.\sqrt{-\left(\log_4\frac{1}{16}-9^0\right)}-\frac{1}{2}\cdot[7^2-(-5)^2]\cdot\sqrt{\frac{1}{3}+(-1)^{28}}=$

d) $\left[\left(-\frac{5}{3}\right):(-5)\right]:\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{3}\right)+\left[\sqrt{3^{2}+9}\cdot\sqrt{8}-\sqrt{\frac{6^{2}-3\cdot 2^{2}}{7^{1}-7^{0}}}\right]\cdot 3^{-1}=$

e) $\left[\left(1-\frac{7}{16}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{25-4^{2}}}{log_{7}49}\right]\cdot\frac{5^{-4}\cdot 5^{5}+5^{0}-(-1)}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{-4}-(-2)^{3}}=$

f) $\frac{5^{2}+2}{-5^{2}}\cdot\frac{log_{8}8+\frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{7}{3}+3}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}+\frac{\frac{9}{4}:\frac{3}{8}}{\sqrt{-2^{2}+7}}=$

Respuestas Capítulo 1 - Números y operaciones aritméticas

EJERCICIO N° 1:

a) 1
b) –2
c) $-\frac{17}{6}$
d) $\frac{3}{4}$
e) $\frac{77}{15}$
f) 2
g) 369
h) 12500
i) 3500

EJERCICIO N° 2:

a) –2
b) 3
c) –9

EJERCICIO N° 3:

a) –6
b) 2
c) $\frac{23}{64}$
d) $\frac{1}{16}$

EJERCICIO N° 4:

a) $\frac{7}{8}$
b) –4
c) $-\sqrt{3}$
d) 4
e) $-\frac{7}{8}$
f) 0

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión algebraica** es toda combinación de números expresados por letras o por letras y números, vinculadas entre sí mediante las operaciones de suma, sustracción, multiplicación, potenciación y radicación.

$$2x(x+4) \qquad 4x^5+5x^3-\frac{1}{4}$$

Los números son los **coeficientes**, y las letras las **variables o indeterminadas.**

Se denomina **grado**, al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficiente no nulos.

$P(x)=-x+5x^2-7x^7$ grado 7

Se denomina **coeficiente principal** al que multiplica a la variable de mayor exponente.

$P(x)=-x+5x^2-7x^7$ coeficiente principal -7

El polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto a los exponentes de la variable

$P(x)=-x+5x^2-7x^7$ creciente

El polinomio está **completo** si tiene todas las potencias.

$R(x)=2x^3-5x^2+7x-1$ polinomio completo

$Q(x)=x^4-3x^2-2$ polinomio incompleto

Operaciones entre expresiones algebraicas

Suma o Adición

La **suma** de dos o más polinomios es otro polinomio, cuyos términos son los términos de los polinomios sumandos, reduciendo previamente los semejantes.

Dados:

$P(x)=-2+2x^2-7x^3+x^4 \qquad Q(x)=3x^2-9x^3+5x$

$P(x)+Q(x)=$

$$\begin{array}{r} -2+0x+2x^2-7x^3+x^4 \\ +\quad 0+5x+3x^2-9x^3+0x^4 \\ \hline -2+5x+5x^2-16x^3+x^4 \end{array}$$

Resta o Sustracción

Para restar dos polinomios, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

$P(x)-Q(x)=$

$$\begin{array}{rr} & -2+0x+2x^2-7x^3+x^4 \\ + & 0-5x-3x^2+9x^3-0x^4 \\ \hline & -2-5x-x^2+2x^3+x^4 \end{array}$$

Ejercicio N°1

Resolver las siguientes sumas algebraicas de polinomios

$P(x)=-4x^2+3x-4x^3-7 \qquad Q(x)=-x^2-2 \qquad R(x)=3-2x^2+5x^4-2x^3$

a) $P(x)+R(x)$

b) $P(x)-Q(x)$

c) $P(x)+Q(x)-R(x)$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva, se multiplica cada término del primero por cada término del segundo y luego se suman los términos semejantes.

$P(x)=x^2-3x+1 \quad \text{y} \quad Q(x)=4x^2-x$

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= \left(x^2-3x+1\right)\cdot\left(4x^2-x\right) \\ &= x^2\cdot 4x^2+x^2\cdot(-x)+(-3x)\cdot 4x^2+(-3x)\cdot(-x)+1\cdot 4x^2+1\cdot(-x) \\ &= 4x^4-x^3-12x^3+3x^2+4x^2-x \\ &= 4x^4-13x^3+7x^2-x \end{aligned}$$

Ejercicio n°2

Resuelva las siguientes multiplicaciones:

a) $\left(-\dfrac{5}{4}x^2yz^3\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}xy^{-1}z^{-2}\right)$

b) $\left(x^3+3x^2-x+5\right)\cdot\left(x^2-3x-2\right)$

c) $\left(2+5x^2\right)\cdot(1-4x)\cdot(-3+2x)$

d) $\left(-3x^2+7\right)\cdot\left(-4x^2-2\right)$

Potencia

Calcular la **potencia enésima** de un polinomio significa multiplicar ***n*** veces dicho polinomio por sí mismo, siendo ***n*** un número natural.

Se considera a continuación, dos casos particulares de potenciación que serán útiles al factorizar polinomios.

Cuadrado de un binomio

Dada la expresión $\left(x+y\right)^{2}$, esto es equivalente a $\left(x+y\right)\cdot\left(x+y\right)$

Si se realiza el producto planteado:

$$\begin{aligned}\left(x+y\right)\cdot\left(x+y\right) &= x^{2}+xy+yx+y^{2}\\ &= x^{2}+2xy+y^{2}\end{aligned}$$

El **cuadrado de un binomio** es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos más el doble producto del primero por el segundo.

Ejercicio n°3

Desarrollar el cuadrado de los binomios dados y analizar los signos del trinomio obtenido en cada caso:

a) $\left(x+y\right)^{2}$

b) $\left(x-y\right)^{2}$

c) $\left(-x+y\right)^{2}$

d) $\left(-x-y\right)^{2}$

Cubo de un binomio

Asumiendo que se quiere calcular $\left(x+y\right)^{3}$

Se puede desarrollar como:

$$\left(x+y\right)^{3}=\left(x+y\right)^{2}+\left(x+y\right)$$

$$\left(x+y\right)^{3}=\left(x^{2}+2xy+y^{2}\right)\cdot\left(x+y\right)$$

efectuando el producto

$$\left(x+y\right)^{3}=x^{3}+x^{2}y+2x^{2}y+2xy^{2}+y^{2}x+y^{3}$$

Sumando términos semejantes y resulta:

$$\left(x+y\right)^{3}=x^{3}+3x^{2}y+3xy^{2}+y^{3}$$

El **cubo de un binomio** es igual a la suma del cubo del primer término más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.

Ejercicio n°4

Desarrollar el cubo de los binomios y analizar los signos del cuatrinomio obtenido:

a) $\left(x+y\right)^{3}$

b) $\left(-x+y\right)^{3}$

c) $\left(x-y\right)^{3}$

d) $\left(-x-y\right)^{3}$

División o cociente de polinomios

Se puede expresar la división de un polinomio $P(x)$, por un polinomio $Q(x)$ de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

Siendo $P(x)$ el polinomio dividendo $Q(x)$ el polinomio divisor, $R(x)$ el resto y $C(x)$ el cociente de la expresión. Para poder llevar adelante el cociente, es necesario que el grado del polinomio $P(x)$ sea mayor o igual al grado de polinomio $Q(x)$.

Antes de desarrollar la división, es requerido realizar algunos pasos previos.

1. Comprobar la factibilidad, es decir que grado de $P(x) \geq$ grado de $Q(x)$.
2. Ordenar los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.
3. Completar el polinomio $P(x)$.

Una vez completados los pasos anteriores, se procede a realizar la división, de la siguiente manera:

1. Se divide el primer término del polinomio $P(x)$, por el primer término del polinomio $Q(x)$. El resultado, será el primer término del polinomio $C(x)$.
2. Se multiplica ese término obtenido, por $Q(x)$. El polinomio resultado, se resta al polinomio $P(x)$. El resultado será el nuevo dividendo.
3. Se realiza el mismo procedimiento, hasta que el grado de $P(x) <$ grado de $Q(x)$.

Notar que la expresión resultante debe cumplir con el algoritmo de la división, es decir que:

$$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Por ejemplo:

Dados los siguientes polinomios, $P(x) = 2x^4 + x + 1$, y $Q(x) = x^2 + 1$, obtenga la división.

Verificación:

1. Grado de $P(x) = 4 \geq$ grado de $Q(x) = 2$.
2. Ambos polinomios están ordenados en **x**.
3. Es necesario completar $P(x)$, quedando $P(x) = 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1$

Resolución de los ejercicios

1. Dividir el primer término del $P(x)$ por el primer término de $Q(x)$.

Sería $2x^4 : x^2 = 2x^2$

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+0x^3+0x^2+x+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

2. Multiplicar el primer término de $C(x)$ por el polinomio $Q(x)$.

   Es decir: $2x^2\left(x^2+1\right)=2x^4+2x^2$

3. Restar esa expresión a P (x): $2x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^4+0x^3+0x^2+x+1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} - & & 2x^2 \\ & 2x^4+0x^3+0x^2 & \\ \cline{1-2} & 0x^4+0x^3-2x^2+x+1 & \end{array}$$

4. Repetir 1. Dividir el primer término del $P(x)$ por el primer término de $Q(x)$.

   Sería $-2x^2 : x^2 = -2$

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^4+0x^3+0x^2+x+1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} - & & 2x^2-2 \\ & 2x^4+0x^3+2x^2 & \\ \cline{1-2} & 0x^4+0x^3-2x^2+x+1 & \end{array}$$

5. Repetir 2. Multiplicar el término agregado en $C(x)$ por el polinomio $Q(x)$

   Es decir: $-2\left(x^2+1\right)=-2x^2-2$

6. Restar esa expresión a $P(x)$

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^4+0x^3+0x^2+x+1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} - & & 2x^2-2 \\ & 2x^4+0x^3+2x^2 & \\ \cline{1-2} & 0x^4+0x^3-2x^2+x+1 & \\ - & & \\ & \qquad\quad -2x^2 \quad\;\; -2 & \\ \cline{1-2} & \qquad\quad 0x^2+x+3 & \end{array}$$

Los polinomios $C(x)$ y $R(x)$ son, entonces: $C(x)=2x^2-2$ y $R(x)=x+3$

Ejercicio N°5:

Realizar las siguientes divisiones:

a) $\left(\frac{1}{16}x^3y^8\right):\left(\frac{1}{2}x^2y^8\right)$

b) $\left(x^3-2x^2+1\right):\left(x-1\right)$

c) $\left(6x^5-5x^3-35x-14x^2+23x^4+20\right):\left(3x^3-5+x^2\right)$

d) $\left(48x^2+16x^4-18x-62x^3\right):\left(5+2x^2-6x\right)$

Ejercicio N°6:

Calcular el dividendo si:

Divisor: $2x+x^2-3$

Cociente: $6x^2-12x+44$

Resto: $-129x+134$

Ejercicio N°7:

Calcular el divisor si:

Dividendo: $2x^4-3x^3+10x^2-17x+3$

Cociente: $2x-3$

Resto: 0

Ejercicio N°8:

El cociente C y el resto R que resulta de dividir $\left(x-2+x^3\right)\div\left(x-2\right)$ es:

a) $C=x^2-2x+5 \quad R=-12$

b) $C=x^2+2x+5 \quad R=8$

c) $C=x^2+2x+5 \quad R=12$

d) $C=x^2+2x+5 \quad R=-8$

Teorema del resto

El **resto** de dividir un polinomio de grado $\boldsymbol{n}$ por otro de la forma $x\pm a$ es el valor numérico del polinomio dividendo, para $\boldsymbol{x}$ igual a $\boldsymbol{a}$ cambiado de signo.

Por ejemplo, para determinar el resto del cociente entre:

$P(x)=\left(x^5-3x^2-4\right) \qquad Q(x)=\left(x+2\right)$

Primero se determina el opuesto de $-a=2\rightarrow -a=-2$

Se reemplaza en P(x) a $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{(-a)}$

$P(-2)=(-2)^5-3(-2)^2-4$

Resolviendo $P(-2)=-48$

Ejercicio N°9:

Calcular el resto de las siguientes divisiones, aplicando el teorema correspondiente:

a) $\left(-x^5-x^3+4x-3\right)\div\left(x-2\right)$

b) $\left(2x^2-3x^4-5x+3\right)\div\left(x+3\right)$

c) $\left(-5x^5+2x^3-4x^2+x-7\right)\div\left(x+1\right)$

d) $\left(x^3+3x-7\right)\div\left(x-5\right)$

Ejercicio N°10:

Calcular el valor de ***a*** aplicando el teorema del resto

a) $\left(-2x+7\right)\div\left(x-a\right)$ conociendo que el resto = 6

b) $\left(x^3-3x+a\right)\div\left(x-1\right)$, conociendo que el resto es 0

Factorización de expresiones algebraicas

Factorizar una expresión algebraica es expresar la misma como el **producto de dos o más factores.**

<u>Casos de factorización.</u>

- Factor común
- Factor común por grupos
- Trinomio cuadrado perfecto
- Cuatrinomio cubo perfecto
- Diferencia de cuadrados
- Suma o diferencia de potencia de igual grado

Factor común

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o de la resta.

Para extraer el factor común se debe proceder de la manera inversa. Primero se debe reconocer cual es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

Ejemplo:

$P\left(x\right)=3x\cdot2x-3x\cdot1\rightarrow3x$ es el factor común de los términos

$P\left(x\right)=3x\left(2x-1\right)$ donde dentro del paréntesis va lo que resulta de dividir cada termino por $3x$.

Ejercicio N°11:

Extraer factor común:

a) $6x^5-6x^4+2x^3$

b) $-\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{15}x-\frac{2}{3}$

c) $3x^5-\frac{3}{5}x+6$

d) $3x^2-15x^4+5x^6$

Factor común por grupos

Se extrae factor común por grupos cuando en el polinomio existen grupos de igual número de términos, cada uno de los cuales tiene un factor común y, al extraerlo, la expresión obtenida en cada grupo es la misma.

Ejemplo:

$P(x)=4x^3-2x^2+6x-3$ se forman grupos en los cuales haya un factor común

$$P(x)=\underset{\substack{\downarrow\\ 2x^2}}{\left(4x^3-2x^2\right)}+\underset{\substack{\downarrow\\ 3}}{\left(6x-3\right)}\qquad \textit{factor común}$$

$P(x)=2x^2(2x-1)+3(2x-1)$ En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor común.

$$P(x)=(2x-1)(2x^2+3)$$

Ejercicio N°12:

Factorizar las siguientes expresiones.

a) x^4-x^3+2x-2

b) $x^5-3x^3-2x^2+6$

c) x^3-2x^2-x+2

d) $-60+30x+20x-10x^2$

e) $6x^3-3xz+8x^2z-4z^2$

f) $3z^7+\frac{1}{3}z^5y^2-z^6y-6z^2y^3-\frac{2}{3}y^5+2zy^4$

g) $x^3+2x^2y+xy^2+2x^2+4xy+2y^2$

Trinomio cuadrado perfecto

Cuando estamos en presencia de un trinomio, podremos verificar si se trata de un trinomio cuadrado perfecto y puede ser factorizado como el cuadrado de un binomio.

Se deben cumplir que dos de sus términos sean cuadrados perfectos, y una vez determinadas sus bases, comprobar si el término restante es el doble del producto de esas bases.

El factoreo de un **trinomio cuadrado perfecto** consiste en encontrar el binomio que, elevado al cuadrado, nos reproduzca el trinomio dado.

Ejemplo:

$$4x^2 \ + \ 12x \ + \ 9 = (2x-3)^2$$

Ejercicio N°13:

Resolver las siguientes expresiones

a) $\left(\frac{1}{2}x-5\right)^2$

b) $\left(x^2+3\right)^2$

c) $\left(x-6\right)^2$

d) $\left(\frac{2}{3}x-2\right)^2$

Ejercicio N°14:

Completar con el valor que corresponda para que resulte un trinomio cuadrado perfecto

a) $x^2+\ldots x+9$

b) $\ldots x^2-20x+25$

c) $9x^2-12x+\ldots$

d) $4x^2+\ldots x+9$

Ejercicio N°15:

Factorizar las siguientes expresiones:

a) $a^2+8a+16$

b) $z^2+2zy+y^2$

c) $n^2+25+10n$

d) $-60xy-25y^2-36x^2$

e) $81+e^4-18e^2$

Cuatrinomio cubo perfecto

Cuando nos encontramos con un cuatrinomio, podemos verificar si se trata de un **cuatrinomio cubo perfecto.** Para ello tendrá que reunir las siguientes características:

Dos de los términos son cubos, encontrar sus bases.

Los términos restantes deben verificar que sean el triple del cuadrado del primero por el segundo y el otro el triple del primero por el cuadrado del segundo.

Ejemplo:

$$8x^3 \quad + \quad 36x^2 \quad + \quad 54x \quad + \quad 27 = (2x-3)^2$$

El factoreo de un **cuatrinomio cubo perfecto** consiste en encontrar el binomio que elevado al cubo reproduzca el cuatrinomio dado.

Ejercicio N°16:

Expresar cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio

a) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

b) $\frac{1}{8}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

c) $27x^6 - 81x^5 + 81x^4 - 27x^3$

Ejercicio N°17:

Factorizar las siguientes expresiones

a) $a^3 - 15a^2 + 75a - 125$

b) $27 + 36b^2 - 54b - 8b^3$

c) $-8y^9 + 12y^6 - 6y^3 + 1$

d) $z^3 + 3z^2 + 3z + 1$

Diferencia de cuadrados

La **diferencia de cuadrados** es igual al producto de la suma por la diferencia de las bases.

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$$

No debemos confundir diferencia de cuadrados con el cuadrado de una diferencia.

$$a^2 - b^2 \neq (a-b)^2$$

Ejercicio N°18:

Factorizar las siguientes expresiones

a) $4x^2 - 121y^2$

b) $x^3 - 64x$

c) $\frac{25}{16}x^2 - \frac{1}{9}$

d) $9x^4y^2 - 64x^2$

e) $a^4 - 36$

f) $-9y^2 + y^4$

g) $z^6 - 16z^2$

h) $100c^2 - 9$

Suma o diferencia de potencias de igual grado

Cuando se tiene expresiones del tipo $x^n \pm a^n$, se las puede expresar como el producto de dos expresiones: el binomio $(x \pm a)$ y el polinomio cociente que surge de realizar dicha división. Para ello, es necesario conocer bajo qué expresión es divisible la expresión $x^n \pm a^n$, lo cual se obtiene con el Teorema del Resto y puede resumirse de la siguiente manera:

- Suma de potencias de igual grado, es divisible por la suma de las bases, sólo si el exponente es impar.
- Diferencia de potencias de igual grado, es divisible por la suma de las bases, sólo si el exponente es par, y siempre por la resta de las bases.

Una vez identificado el binomio divisor, se procede a realizar la división, para expresar a la expresión original como el producto de ambas expresiones.

Pasos:

1. Identificar el binomio como suma o diferencia de potencias de igual base.
2. Identificar el binomio divisor (en función de lo expresado más arriba).
3. Efectuar la división correspondiente.
4. Expresar la suma o diferencia de potencias de igual base como el producto de ambas expresiones.

Ejemplo:

Dada la siguiente expresión x^5+32, aplique el caso mencionado.

1. La expresión es equivalente a x^5+2^5
2. Al ser una suma de exponente impar, es divisible por $(x+2)$.
3. Realizar la división, que dará como resultado el polinomio

$$C(x)=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$$

Por lo tanto, quedaría el siguiente producto:

$$x^5+32=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

Notar que el polinomio C (x), tendrá la forma:

$$x^{n-1}a^0-x^{n-2}a^1+\cdots-x^0a^{n-1}$$

Cuando se divide por $(x+a)$

Y la forma

$$x^{n-1}a^0+x^{n-2}a^1+\cdots+x^0a^{n-1}$$

Cuando el binomio divisor es $(x-a)$

Ejercicio N°19:

Factorizar las siguientes expresiones:

a) $16x^4 - y^4$

b) $x^5 - 32$

c) $27x^3 + 8$

d) $x^2 - 16$

e) $x^3 + 1$

f) $c^6 - 64$

g) $8x^3 + y^3$

h) $27y^3 + 64a^3$

Descomposición factorial de un polinomio

Al factorizar un polinomio de grado n en una indeterminada, es posible llegar a su descomposición factorial, la cual se basa en el concepto de raíz de un polinomio y en el Teorema Fundamental del Algebra.

El **Teorema Fundamental del Álgebra,** dice que un polinomio de grado n en una indeterminada:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Tiene exactamente n raíces: $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$

Así, la descomposición factorial consistirá en factorizar al polinomio en el producto del coeficiente principal por los binomios de la forma $(x - x_i)$, siendo x_i las **raíces** del polinomio.

Todo polinomio de grado **n** en una indeterminada puede ser expresado como:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Donde a_n es el coeficiente principal y $x_1, x_2, \ldots x_n$ son raíces del polinomio.

Para encontrar las raíces, si el polinomio es de primer grado, tiene 1 raíz y se encuentran rápidamente despejando.

Ejemplo:

$$P(x) = 2x - 5$$

Despejando x

$$2x - 5 = 0$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Dado que el coeficiente principal es 2 y la raíz es $5/2$, la descomposición factorial de P(x) es:

$$P(x) = 2(x - 5/2)$$

Para encontrar las raíces de un polinomio de segundo grado, se puede aplicar la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En donde ***a*** es el coeficiente principal, ***b*** es el coeficiente del término de primer grado y **c** termino independiente.

Ejemplo:

$$P(x)=x^2+x-6$$

Aplicando la fórmula

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$$

Si se resuelve, se encuentran las raíces $x_1=2 \quad x_2=-3$

Entonces la descomposición factorial:

$$P(x)=1(x-2)(x+3)$$

Ejercicio N°20:

Dado los siguientes polinomios, obtener la descomposición factorial de los mismos.

a) $2x^2-8$ b) x^3-4x c) $2x^2+2x-4$

Ejercicio N°21:

El polinomio P de grado 3, cuyas raíces son 3, 3, 0 y $P(-2)=100$ es:

a) $P=-2x^3+12x^2-18x+100$

b) $P=x^3-6x^2+9x$

c) $P=-2x^3-6x^2+9x$

d) $P=-2x^3+12x^2-18x$

Ejercicio N°22:

Si P(x) es un polinomio de grado 3 con raíces -1, 2 con $P(-3)=0$ y $P(0)=-6$ entonces:

a) $P(1)=-6$

b) $P(1)=-7$

c) $P(1)=-9$

d) $P(1)=-8$

Ejercicio N°23:

El polinomio $x^3 - 3x^2 + 2x$ puede ser factorizado:

a) $x(x+1)(x-2)$

b) $x(x-1)(x-2)$

c) $(x+1)(x-2)$

d) $x(x-3)(x+2)$

Ejercicio N°24:

Si P(x) es un polinomio de segundo grado tal que $P(-7) = P(3) = 0$ y $P(0) = -42$, entonces $P(4) =$

a) 22

b) 11

c) 21

d) -11

Ejercicio N°25:

Si se conoce que un polinomio es de grado 2, que su coeficiente principal es -3 y sus raíces son, 2, y (-3), expresar el polinomio y su descomposición factorial.

Expresiones algebraicas fraccionarias.

Se llama **fracción algebraica** al cociente entre dos polinomios P y Q, es decir, a la expresión $\frac{P}{Q}$, siendo $Q \neq 0$.

Ejercicio N°26:

Señalar la opción correcta justificando su elección

1) En la fracción algebraica $\frac{x-2}{x^2-16}$ debe verificar que

   a) $x \neq 4$

   b) $x \neq 0$

   c) $x \neq 2$

   d) $x \neq -4$

   e) $x \neq \pm 4$

2) ¿Cuál de las siguientes expresiones está definida para cualquier valor de la indeterminada x?

   a) $\frac{-5}{x-3}$

   b) $\frac{3}{x}$

   c) $\frac{x-8}{-3}$

   d) $\frac{x^2-9}{x}$

   e) $\frac{(x-5)(x-2)}{5x}$

Simplificaciones de expresiones algebraicas

Si en una fracción algebraica se factoriza su numerador y denominador, se pueden simplificar los factores del numerador y del denominador que sean iguales.

Ejemplo:

1. $\dfrac{x-3}{x^3-9x}=\dfrac{x-3}{x\left(x^2-9\right)}=\dfrac{x-3}{x\left(x-3\right)\left(x+3\right)}=\dfrac{1}{x\left(x+3\right)}$

2. $\dfrac{4x+8}{9x+18}=\dfrac{4\left(x+2\right)}{9\left(x+2\right)}=\dfrac{4}{9}$

3. $\dfrac{x^3+27}{x^2-3x+9}=\dfrac{\left(x+3\right)\left(x^2-3x+9\right)}{x^2-3x+9}=x+3$

Suma y resta de fracciones algebraicas

Pueden presentarse dos situaciones:

1. Suma o resta de fracciones algebraicas de igual denominador
2. Suma o resta de fracciones algebraicas de distinto denominador.

1. La **suma o resta de dos o más fracciones algebraicas** de igual denominador es otra fracción algebraica que tendrá el mismo denominador que los sumandos o minuendos y como numerador, la suma o diferencia de los numeradores de los sumandos o del minuendo y sustraendo, respectivamente.

   $\dfrac{P}{Q}+\dfrac{R}{Q}=\dfrac{P+R}{Q}$ $\quad$ $\left(P, Q \text{ y } R \textit{ son polinomios}\right)$

2. Para el segundo caso, se procede de la siguiente forma:
   a) Se factorizan los denominadores de las fracciones algebraicas dadas. Se calcula el mínimo común denominador.
   b) Se obtienen fracciones algebraicas equivalentes de igual denominador.
   c) Se efectúan las operaciones indicadas en el numerador
   d) Se reducen términos semejantes.

Ejemplo:

$$\frac{5}{x} \quad + \quad \frac{x-2}{x^2+2x} \quad - \quad \frac{4}{x+2}=$$

Se calcula el mínimo común denominador $=x\left(x+2\right)$entonces:

$$\frac{5(x+2)+(x-2)-4}{x(x+2)}=\frac{5x+10+x-2-4}{x(x+2)}=\frac{6x+4}{x(x+2)}$$

Producto de fracciones algebraicas

El **producto de dos o más fracciones** algebraicas es otra fracción algebraica que tiene como numerador el producto de los numeradores de los factores y como denominador, el producto de los denominadores de los factores.

$$\frac{P}{R}\cdot\frac{Q}{S}=\frac{PQ}{RS} \qquad \textit{siendo } P, Q, R \textit{ y } S \textit{ polinomios}$$

$$\frac{x+3}{x-2}\cdot\frac{2x}{x+3}=\frac{2x^2+6x}{x^2+x-6}=\frac{2x(x+3)}{(x-2)(x+3)}=\frac{2x}{x-2}$$

Cociente de fracciones algebraicas

El **cociente entre dos fracciones algebraicas** es otra fracción algebraica que se obtiene multiplicando la fracción algebraica dividendo por la reciproca de la fracción algebraica divisor.

$$\frac{P}{R}:\frac{Q}{S}=\frac{P\cdot S}{R\cdot Q} \qquad \textit{siendo } P, Q, R \textit{ y } S \textit{ polinomios}$$

Ejercicio N°27:

Efectuar las operaciones indicadas, factorizando y simplificando cuando sea conveniente

a) $\frac{a}{3a+9}+\frac{3}{3a+9}=$

b) $\frac{6w}{2w-5}-\frac{15}{2w-5}=$

c) $\frac{z^4}{z^2-3}-\frac{3z^2}{z^2-3}=$

d) $\frac{2y+3}{y^2+y-1}-\frac{y-5}{y^2+y-1}=$

e) $\frac{2}{a+3}+\frac{a}{a-2}=$

f) $\frac{2y}{y+3}+\frac{3}{y-3}-\frac{y+1}{y^2-9}=$

g) $\frac{2q}{3q+3}+\frac{4}{q+1}-\frac{5q+1}{q^2-1}=$

h) $\frac{2a}{a+2}+\frac{3a+1}{3a+6}-\frac{2}{a-5}=$

i) $\frac{y^3}{y-1}\cdot\frac{y^2-1}{y^3-y^2}=$

j) $\frac{(a-2)^2}{a^2+3a}\cdot\frac{a^3+3a^2}{a^2-4}=$

k) $\frac{b^2-3b}{3b^3-12b}:\frac{b^2+2b}{b-2}=$

l) $\frac{w^4-2w^3}{w^2-4}:\frac{w^2+4w+4}{w(w+2)}=$

m) $\frac{x^3-125}{x^2-25}:\frac{5x^4+25x^3+125x^2}{5x^3+25x^2}=$

n) $\frac{3k^4+9k^3-3k-9}{2k^2-8k+8}\cdot\frac{4k^4-8k^3}{k^3-1}=$

Ejercicio N°28:

En los siguientes ejercicios efectuar las operaciones indicadas, factorizando y simplificando.

a) La expresión $\dfrac{\left(x^2-2x\right)\left(x^2-6x+9\right)}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-3x\right)}$ se simplifica en:

1. 1
2. $\dfrac{x-2}{x\left(x+3\right)}$
3. $\dfrac{x-2}{\left(x+3\right)}$
4. $\dfrac{x-2}{\left(x-3\right)}$

b) La expresión $\dfrac{\left(x-3\right)\left(x^2-4x+4\right)}{\left(x-2\right)\left(x^2-9\right)}$ se simplifica en:

1. $\dfrac{x-4}{x-2}$
2. $x-2$
3. $\dfrac{x-2}{x+3}$
4. $\dfrac{x-2}{x-3}$
5. $x+2$

Ejercicio N°29:

Factorizar utilizando los casos de factoreo estudiados, mencione el o los casos aplicados

a) $5x^2-10x+5$

b) $3x^2-75$

c) $2x^4-162$

d) $3x^5-9x^4-147x^3+441x^2$

e) $4x^4+8x^3-32x-64$

f) $2x^4-36x^2+162$

g) $a^3-5a^2-9a+45$

h) $2b^3-18b^2+54b-54$

Respuestas Capítulo 2 - Expresiones algebraicas

EJERCICIO Nº1:

a) $5x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 3x - 4$
b) $-4x^3 - 3x^2 + 3x - 5$
c) $-5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3x - 12$

EJERCICIO Nº2:

a) $-\frac{5}{6}x^3z$
b) $x^5 - 12x^3 + 2x^2 - 13x - 10$
c) $-40x^4 + 70x^3 - 31x^2 + 28x - 6$
d) $12x^4 - 22x^2 - 14$

EJERCICIO Nº3:

a) $x^2 + 2xy + y^2$
b) $x^2 - 2xy + y^2$
c) $x^2 - 2xy + y^2$
d) $x^2 + 2xy + y^2$

EJERCICIO Nº4:

a) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
b) $-x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$
c) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
d) $-x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$

EJERCICIO Nº5:

a) $\frac{1}{8}x$
b) $x^2 - x - 1$
c) $2x^2 + 7x - 4$
d) Cociente = $8x^2 - 7x - 17$ Resto = $-85x + 85$

EJERCICIO Nº6:

$6x^4 + 2x^2 - 5x + 2$

EJERCICIO Nº7:

$x^3 + 5x - 1$

EJERCICIO N°8:

La respuesta correcta es b)

EJERCICIO N°9:

a) -35
b) -207
c) -9
d) 133

EJERCICIO N°10:

a) $\frac{1}{2}$
b) 2

EJERCICIO N°11:

a) $2x^3(3x^2 - 3x + 1)$
b) $\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x - 2\right)$
c) $3\left(x^5 - \frac{1}{5}x + 2\right)$
d) $x^2\,(3 - 15x^2 + 5x^4)$

EJERCICIO N°12:

1) $(x^3 + 2)\,(x - 1)$
2) $(x^3 - 2)\,(x^2 - 3)$
3) $(x - 2)\,(x^2 - 1)$
4) $(x - 2)\,(30 - 10x)$
5) $(2x^2 - z)\,(3x + 4z)$
6) $\left(3z^2 + \frac{1}{3}y^2 - zy\right)(z^5 - 2y^3)$
7) $(x^2 + 2xy + y^2)\,(x + 2)$

EJERCICIO N°13:

a) $\frac{1}{4}x^2 - 5x + 25$
b) $x^4 + 6x^2 + 9$
c) $x^2 - 12x + 36$
d) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$

EJERCICIO N°14:

a) 6
b) 4
c) 4
d) 12

EJERCICIO N°15:

a) $(a + 4)^2$
b) $(z + y)^2$
c) $(n + 5)^2$
d) $-(5y + 6x)^2$
e) $(e^2 - 9)^2$

EJERCICIO N°16:

a) $(x - 3)^3$
b) $\left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)^3$
c) $(3x^2 - 3x)^3$

EJERCICIO N°17:

a) $(a - 5)^3$
b) $(-2b + 3)^3$
c) $(-2y^3 + 1)^3$
d) $(z + 1)^3$

EJERCICIO N°18:

a) $(2x - 11y)\,(2x + 11y)$
b) $x\,(x - 8)\,(x + 8)$
c) $\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{3}\right)$
d) $(3x^2y - 8x)\,(3x^2y + 8x)$
e) $(a^2 - 6)\,(a^2 + 6)$
f) $(y^2 - 3y)\,(y^2 + 3y)$
g) $(z^3 - 4z)\,(z^3 + 4z)$
h) $(10c - 3)\,(10c + 3)$

EJERCICIO N°19:

a) $(2x - y)(8x^3 + 4x^2y + 2xy^2 + y^3)$
b) $(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$
c) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$
d) $(x - 4)(x + 4)$
e) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$
f) $(a - 2)(a^5 + 2a^4 + 4a^3 + 8x^2 + 16 x + 32)$
g) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$
h) $(3y + 4a)(9y^2 - 12ya + 16a^2)$

EJERCICIO N°20:

a) $2(x - 2)(x + 2)$
b) $x(x - 2)(x + 2)$
c) $2(x - 1)(x + 2)$

EJERCICIO N°21:

La respuesta correcta es d)

EJERCICIO N°22:

La respuesta correcta es d)

EJERCICIO N°23:

La respuesta correcta es b)

EJERCICIO N°24:

La respuesta correcta es a)

EJERCICIO N°25:

$P(x) = -3(x - 2)(x + 3)$

$P(x) = -3x^2 - 3x + 18$

EJERCICIO N°26:

1) La respuesta correcta es e)
2) La respuesta correcta es c)

EJERCICIO N°27:

a) $\frac{1}{3}$
b) 3
c) z^2
d) $\frac{y+8}{y^2+y-1}$
e) $\frac{(a^2+5a-4)}{(a+3)(a-2)}$
f) $\frac{2y^2-4y+8}{(y+3)(y-3)}$
g) $\frac{2q^2-5q-15}{3(q-1)(q+1)}$
h) $\frac{9a^2-50a-17}{3(a+2)(a-5)}$
i) $\frac{y(y+1)}{(y-1)}$
j) $\frac{a(a-2)}{(a+2)}$
k) $\frac{b-3}{3b(b+2)^2}$
l) $\frac{w^4}{(w+2)^2}$
m) 1
n) $\frac{6k^3(k+3)}{(k-2)}$

EJERCICIO N°28:

1) La respuesta correcta es c)
2) La respuesta correcta es c)

EJERCICIO N°29:

a) $5\,(x-1)^2$ factor común y trinomio cuadrado perfecto
b) $3\,(x-5)\,(x+5)$ factor común y diferencia de cuadrados
c) $2\,(x^2+9)\,(x-3)(x+3)$ factor común y diferencia de cuadrados
d) $3x^2\,(x-3)\,(x+7)\,(x-7)$ factor común, factor común por grupos y diferencia de cuadrados
e) $4\,(x+2)\,(x-2)\,(x^2+2x+4)$ factor común y diferencia de cuadrados
f) $2\,(x+3)^2\,(x-3)^2$ factor común, trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados
g) $(a-5)\,(a-3)\,(a+3)$ factor común por grupo y diferencia de cuadrados
h) $2\,(b-3)^3$ factor común y cuatrinomio cubo perfecto