colección MANUALES

CICLO DE NIVELACIÓN

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

2023

Editorial Económicas hace accesible en forma gratuita el Capítulo 1. La obra se puede adquirir en: **www.editorial.eco.unc.edu.ar**

COMPILADORA
Nancy Stanecka

AUTORES
Nancy Stanecka / Josefina Racagni
Oscar Margaría / Mariana González
María Inés Stímolo / Patricia Caro

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Editorial Económicas

UNC Universidad Nacional de Córdoba

Capítulo 1

NÚMEROS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS

Desafío 1

La mamá de Lucas sabía que el viaje de egresados de su hijo tenía un costo de $80.000 pagando de contado. En base a sus posibilidades presupuestarias, decidió entregar la cuarta parte del total y pagar el resto con tarjeta de crédito.

Sin embargo, como no tenía saldo suficiente en una, tuvo que recurrir al pago con dos tarjetas, de acuerdo al siguiente esquema:

- El 30 % del total del viaje con Tarjeta Nexos, que excepcionalmente tenía un descuento del 20 % sobre el monto de lo cargado a dicha tarjeta.
- El resto, con Tarjeta Raíces, en 12 cuotas mensuales y con un recargo del 15 % para todo el período.

¿Cuánto fue el costo total del viaje de Lucas?

Como se puede observar, nos encontramos con un pequeño problema relacionado con la economía familiar. Sería muy bueno que pudiéramos resolverlo ahora o, quizás, sería mejor avanzar en la revisión de todos los temas de este capítulo y luego ver qué simple resulta responder a este desafío.

Introducción

¿Cómo y porqué surgieron los números? En su necesidad de contar objetos, el hombre primitivo creó una aritmética no formal contando, en principio, con los dedos de la mano o utilizando piedras pequeñas.

Mucho tiempo después, en las culturas orientales –caldea, egipcia, china e india–, aparecieron los primeros elementos matemáticos expuestos de manera transmisible.

En la actualidad, el uso universal del sistema decimal de números, la suma de ellos, el producto y la división son conocimientos matemáticos, estructurados y clasificados, que hoy resultan básicos para la humanidad.

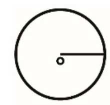
Para representar cantidades y medidas, es habitual trabajar con números, por ejemplo:

Natalia recibió **250** mensajes en WhatsApp en menos de una hora.

La temperatura mínima fue de **-3** grados centígrados.

Se estima que la inflación, en el último semestre, será del **4,7 %**.

El perímetro de la circunferencia es **2π** por radio.



Podemos observar que los números que usamos como parte de nuestra comunicación se expresan de distinta manera (250; -3; 4,7; 2π) y, en sí mismos, pretenden simbolizar diferentes hechos, por lo que deben ser identificados y caracterizados claramente para poder operar con ellos.

Sin pretender gran rigurosidad, nos proponemos repasar cada uno de los conjuntos numéricos y recordar sus características, a partir del conocimiento que poseemos de las operaciones básicas. Nos detendremos en las definiciones formales de las operaciones, sus elementos y propiedades más relevantes.

Seguramente con esta base podremos abordar los temas siguientes con mayor facilidad.

1. Números naturales

En función de lo que fue el inicio en la construcción de la ciencia matemática, se considera que los primeros números que aparecen son los que aprendimos en la infancia y que hoy llamamos **naturales.**

Los números naturales son los que usamos para contar o enumerar y se los simboliza con la letra $\mathbb{N}$.

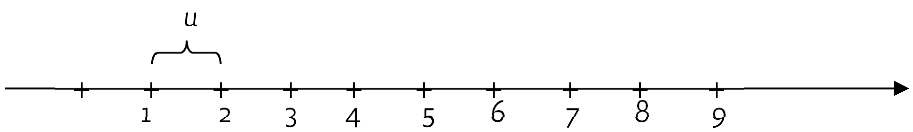
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n + 1, \ldots\}$$

Observemos que el conjunto de los números naturales:

- Tiene un primer elemento, el uno (1).
- Cada natural (excepto el 1) se puede obtener agregando uno (1) al número natural anterior.
- No tiene un último elemento.

¿Cómo simbolizarías el número natural anterior a n?

Podemos representar gráficamente a los naturales en una recta, considerando un segmento de referencia fijo u, que servirá para separar un natural del inmediato siguiente, comenzado con el número 1.



Ahora, formalicemos cuáles son las operaciones que se definen entre los números naturales.

1.1 Operaciones en los naturales

> *La **suma o adición** de dos números naturales a y b es otro número natural a + b que se obtiene de agregarle a uno de ellos tantas unidades como represente el otro.*

Cada uno de los números que intervienen en la suma se llama **sumando** y el número que los reúne o agrupa se denomina **suma**.

$$a + b = c \longrightarrow \textit{suma}$$

$\downarrow \; \downarrow$

sumandos

> *La **multiplicación o producto** de dos números naturales a y b es otro número natural a · b que se obtiene de sumar uno de ellos tantas veces como indique el otro.*

$$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ veces}}$$

Cada uno de los números que intervienen en la multiplicación se llama **factor** y el número que resulta se denomina **producto**.

$$a \cdot b = c \longrightarrow \textit{producto}$$

$\downarrow \; \downarrow$

factores

<u>Propiedades de la suma y el producto de números naturales</u>

PROPIEDAD	SUMA	PRODUCTO
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

La suma y el producto de números naturales poseen ciertas **propiedades** que facilitan el cálculo y son de importancia teórica. ¿Las recordamos?

En los naturales también podemos definir **otras operaciones**:

- La **resta** o **sustracción** como la operación inversa de la suma:

$$a - b = c \qquad \text{si y solo si} \qquad b + c = a$$

Entre los números que intervienen en la resta habrá que diferenciar entre el **minuendo**, el **sustraendo** y la **diferencia** o **resta**.

$$\begin{tikzcd} & a - b = c \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & \textit{resta o diferencia} \\ \textit{minuendo} & & \textit{sustraendo} \end{tikzcd}$$

¡Tengamos cuidado! La **resta** y la **división** no gozan de las propiedades conmutativa y asociativa.

- La **división** o **cociente** como la operación inversa del producto:

$$a : b = c \qquad \text{si y solo si} \qquad b \cdot c = a$$

Cada uno de los números que intervienen en la división recibe un nombre. Habrá que diferenciar entre el **dividendo**, el **divisor** y el **cociente**.

$$\begin{tikzcd} \textit{dividendo} & a : b = c \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \textit{cociente} \\ & \textit{divisor} & \end{tikzcd}$$

En el conjunto de los naturales, podemos **sumar y multiplicar** sin problemas, dado que el resultado de sumar o multiplicar números naturales es otro número natural.

Pero cuando **restamos dos naturales,** ¿la diferencia es siempre un natural?

Pensemos qué ocurre en los siguientes casos:

$$\mathbf{3 - 5 = ?} \qquad \mathbf{3 - 3 = ?}$$

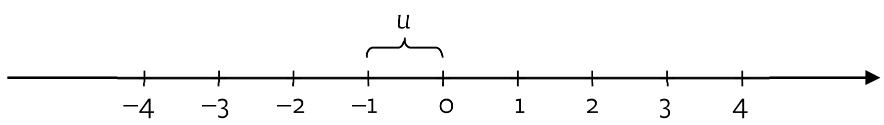
La imposibilidad de obtener diferencias como estas en el conjunto de los números naturales hace necesaria la creación de un nuevo conjunto de números. Surgen así los denominados **números enteros**.

2. Números enteros

Los números enteros vienen a dar solución a la resta de números naturales, en el caso en el que el minuendo es menor o igual al sustraendo, pero, además, estos números nos ayudarán a representar temperaturas, deudas, pérdidas, etc.

> *Los números **enteros** están formados por los naturales, el cero y los naturales precedidos por el signo menos (a los cuales llamamos **"enteros negativos"**). Se los simboliza con la letra $\mathbb{Z}$.*
>
> $$\mathbb{Z} = \{\cdots,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3,\cdots\}$$

Al igual que en los números naturales, podemos representar los enteros sobre una recta en la que se elige un punto como origen, identificándolo con el número cero. Luego, usando un segmento como unidad de referencia, se ubica el resto de los números enteros, estableciendo que los números positivos están a la derecha de ese origen, mientras que los negativos se ubican a la izquierda.



Observemos que:

- Cada número entero, salvo el 0 (cero), consta de un **signo** (+ o −) y de su **valor absoluto,** que es la distancia del número al 0.
- Cada entero tiene asociado su correspondiente **opuesto,** que está representado por el mismo número natural, pero con signo diferente. Por ejemplo, −4 es el opuesto de 4, 3 es el opuesto de −3.
- El conjunto de los números enteros es **discreto**, esto significa que entre dos números enteros solo puede existir una cantidad finita de números enteros.
- En ellos no hay primer elemento, ni último elemento, por lo tanto, existen **infinitos** números enteros.

2.1 Operaciones en los enteros

Las operaciones que hemos definido en los naturales y sus propiedades siguen siendo válidas al trabajar con enteros. Repasemos cómo operar con estos números.

1) Para sumar números enteros habrá que considerar:

SUMA DE NÚMEROS ENTEROS	$a + b$	EJEMPLOS
Si a y b tienen el **mismo signo**	La suma tendrá el **mismo signo** de los sumandos y se suman los valores absolutos.	$5 + 7 = 12$ $(-5) + (-7) = -12$
Si a y b tienen **distinto signo**	La suma tendrá el **mismo signo del mayor de los sumandos** y se restan los valores absolutos.	$-5 + 7 = 2$ $5 + (-7) = -2$
Si uno de los sumandos es **0**	El cero sumado a izquierda o a derecha de un número da el mismo número, se dice que 0 es el **elemento neutro de la suma.**	$a + 0 = 0 + a = a$

2) Para multiplicar habrá que tener presente la **regla de signos**:

PRODUCTO DE NÚMEROS ENTEROS	$a \cdot b$	EJEMPLOS
a y b tienen el **mismo signo**	Se multiplican valores absolutos de los factores y el producto tendrá **signo positivo**.	$5 \cdot 7 = 35$ $(-5) \cdot (-7) = 35$
a y b tienen **distinto signo**	Se multiplican valores absolutos de los factores y el producto tendrá **signo negativo**.	$(-5) \cdot 7 = -35$ $5 \cdot (-7) = -35$
Si uno de los factores es **0**	El producto es **0**.	$a \cdot 0 = 0$ $0 \cdot b = 0$

3) Si multiplicamos un número entero a izquierda o a derecha por 1 (uno), se obtiene el mismo número. Se dice que 1 es el **elemento neutro del producto.** En símbolos:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Ahora, veamos cómo, a partir de lo recordado anteriormente, es posible obtener el resultado de operaciones combinadas.

Por ejemplo, resolvamos:

$$\mathbf{1 - \{2 - [3 + (2 - 4 + 1) - (2 - 3) + 1]\} - 1}$$

Para resolver, habrá que tener presente lo siguiente:

- Un signo menos delante de un paréntesis corchete o llave nos indica que estamos multiplicando por (–1).
- Los signos más (+) y menos (–) separan términos.
- Salvo que existan paréntesis corchetes o llaves, hay que multiplicar y dividir primero y luego sumar o restar (jerarquía de las operaciones).
- La regla de signos también se aplica a la división.

Este ejercicio se puede desarrollar de distintas formas. Optaremos por suprimir primero los paréntesis, luego los corchetes y, finalmente, las llaves, respetando lo que nos indica el signo que los precede y, luego, asociando los valores de acuerdo a si son positivos o negativos.

$$\begin{aligned} 1 - \{2 - [3 + (2 - 4 + 1) - (2 - 3) + 1]\} - 1 &= 1 - \{2 - [3 + \cancel{2} - 4 + 1 - \cancel{2} + 3 + 1]\} - 1 \\ &= 1 - \{2 - 3 + 4 - 1 - 3 - 1\} - 1 \\ &= 1 - 2 + 3 - 4 + 1 + 3 + \cancel{1} - \cancel{1} \\ &= (1 + 3 + 1 + 3) - (2 + 4) \\ &= 8 - 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Actividad 1

Resolver las siguientes operaciones con números enteros:

a) $[-2 + (-1) \cdot (-3)] \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot (1 - 2) =$

b) $-5 - \{3 - [1 + 2 - 4 - (3 - 5 + 2) + 4] + 2 - 3 + 1\} =$

c) $[(-3)(-1)(-2) + 5 \cdot 2] \cdot [(-2)(-1) + 2] =$

d) $-2 \cdot [2 + (-3) \cdot (-1) \cdot (-4) + 5 \cdot 2] - (4 + 3) =$

e) $(-1)(-3)(-1) + (-4)(-2) + (5 - 3)(-1) =$

f) $-[2 \cdot 2 + (-15)(-3)] : (4 + 3) + 5 \cdot 2 =$

g) $(-1)(-7) + 20 : [(-1) + (-4)] + (5 - 3) : (-1) =$

h) $3 + \{(5 + 4) : [3 \cdot (4 : 4) + 4 \cdot (-6) + 24](-1)\} =$

En $\mathbb{Z}$, podemos sumar, restar y multiplicar sin inconvenientes.

Pero... ¿Qué podemos afirmar sobre la división?

En general, para dividir recurrimos a un esquema como el siguiente:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & c \end{array}$$

donde r recibe el nombre de **resto,** siendo a, b y c dividendo, divisor y cociente respectivamente.

Se puede observar que, entre los elementos de la división, se verifica la siguiente igualdad:

$$\boxed{b \cdot c + r = a}$$

Esta fórmula es lo que se denomina **algoritmo de la división**.

Tengamos en cuenta...
Al dividir dos enteros, el cociente no es necesariamente un número entero.
Pensemos qué ocurre en los siguientes casos:
3 : 5 = ? **8 : 3 = ?**

Por ejemplo, el algoritmo de la siguiente división es

$$2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$$

Importante
Si el divisor es 0 ($b = 0$), se dice que el cociente es indeterminado. La división por 0 no está definida.

Si el resto es 0, se dice que la división es **exacta,** y entonces el cociente de la división pertenece al conjunto de los enteros. Pero cuando la división **no es exacta,** debemos recurrir a una nueva extensión del campo numérico, incorporando los números fraccionarios a los enteros. Esto dio lugar a los denominados números **racionales**.

3. Números racionales

Una forma alternativa de representar la división de números enteros es a través de las conocidas fracciones.

En una fracción $\frac{a}{b}$, a se llama **numerador** y b **denominador**, con la condición de que b **es distinto de 0**, ¿por qué?

Los números enteros junto a los fraccionarios conforman el conjunto de los **números racionales**.

Observemos que todo entero puede expresarse como una fracción, es decir $a = \frac{a}{1}$ para cualquier entero a.

*Los números **racionales** son aquellos que pueden expresarse como un cociente de enteros con denominador distinto de 0. Se los simboliza con la letra $\mathbb{Q}$.*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

Otra forma de representar a los racionales es como números decimales con una cantidad finita de cifras decimales o con infinitas cifras decimales, pero periódicas.

En el siguiente cuadro, resumimos las formas de representación y algunos ejemplos de números racionales:

<table>
<tr><th colspan="2">Formas de representación de los números racionales</th></tr>
<tr><td colspan="2">Fracciones
$\frac{4}{10}$; $\frac{10}{8}$; $\frac{16}{6}$; $\frac{11}{18}$</td></tr>
<tr><td>Números con una cantidad finita de cifras decimales.
$\frac{4}{10}=0{,}4$; $\frac{10}{8}=1{,}25$</td><td>Números que presentan cifras decimales que se repiten periódicamente.
$\frac{16}{6}=2{,}666...$, $\frac{11}{18}=0{,}6111...$</td></tr>
</table>

Ahora repasemos cómo se opera con fracciones.

3.1 Operaciones en los racionales

<u>Suma de racionales:</u>

Dados dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, la suma será $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\,d+c\,b}{b \cdot d}$

Por ejemplo:

$$\frac{4}{7}+\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 5+2\cdot 7}{35}=\frac{34}{35}$$

Las propiedades enunciadas para la suma de enteros siguen siendo válidas al operar con racionales.

Otros ejemplos nos serán útiles para recordar variantes en la forma de operar:

- Si tenemos fracciones con el mismo denominador, el resultado será otra fracción del mismo denominador, cuyo numerador resulta de la suma de los numeradores de las fracciones dadas:

$$\frac{8}{3}+\frac{5}{3}=\frac{8+5}{3}=\frac{13}{3}$$

- Al sumar dos fracciones de distinto denominador, se puede tomar como denominador al mínimo común múltiplo entre b y d.

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{6+1}{10}=\frac{7}{10}$$

- Todo número entero se puede pensar como un cociente de enteros.

$$\frac{3}{5}+1=\frac{3}{5}+\frac{1}{1}=\frac{3+5}{5}=\frac{8}{5}$$

Actividad 2

Resolver los siguientes ejercicios con números racionales:

a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=$

b) $\frac{5}{4}+\frac{7}{3}=$

c) $\frac{5}{4}-\frac{7}{3}=$

d) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=$

e) $-\frac{1}{5}+2-\frac{8}{3}=$

f) $\frac{5}{6}-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}=$

Producto de racionales:

Dados dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, el producto será $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

En el **producto** se multiplican los numeradores entre sí y denominadores entre sí.
En el **cociente** se multiplica "cruzado".

Cociente de racionales:

Dados dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, el cociente será $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

De la última definición, surge que podemos pensar a la división de números racionales como un producto invirtiendo la fracción divisora, es decir:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Propiedad de existencia de elemento inverso

El producto de números racionales cumple con todas las propiedades mencionadas para el caso de los números enteros, pero, además, para cada racional $\frac{a}{b}$ con $a \neq 0$ existe su **inverso** $\frac{b}{a}$ tal que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}= 1$.

A partir de esto, se deduce que, en el producto de fracciones, se pueden **simplificar** numeradores con denominadores.

Por ejemplo:

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{8}{5} = \frac{\cancelto{3}{9}}{\cancelto{1}{4}}\cdot\frac{7}{\cancelto{1}{3}}\cdot\frac{\cancelto{2}{8}}{5} = \frac{3\cdot7\cdot2}{5} = \frac{42}{5}$$

Una aplicación muy común de las fracciones lo constituye el cálculo de porcentajes.

Un determinado porcentaje es la parte de un todo y se denota con el símbolo **%**. La idea en que se basa es que el total está dividido en 100 partes.

Por ejemplo: Se realizó una compra de útiles en una librería mayorista por $3.000. A este importe hay que agregarle el 21 % del IVA, ¿cuánto es el monto a pagar de IVA? Para responder, observemos que el 21 % de 3.000 se puede calcular como:

$$\frac{21}{100}\cdot 3.000=630$$

En síntesis, se deberá pagar adicionalmente $630 en concepto de IVA.

Actividad 3

Invitamos a ver **un video** sobre el tema en el **Aula Virtual** en Recursos y Materiales de la Unidad 1.

Resolver:

a) $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=$

b) $-\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{3}=$

c) $\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{5}=$

d) $\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$

e) $-\frac{1}{3}:\left(-\frac{7}{3}\right)=$

f) $\frac{5}{6}:\frac{10}{3}+\frac{4}{2}=$

g) ¿Cuánto es el 35 % de 200 y cuánto es el 8 % de 400? (Recordar que, para obtener un porcentaje, se debe multiplicar por una fracción).

h) Entre tres hermanos deben repartirse \$1.200. El primero se lleva 7/15 del total; el segundo, 5/12 del total; y el tercero, el resto. ¿Cuánto dinero se ha llevado cada uno?

i) $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\times\frac{8}{5}+\frac{1}{2}:\left(-\frac{1}{4}\right)=$

j) $\left[-\frac{2}{5}:(-4)\right]:\left\{\left[-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)\right]:\left(-\frac{9}{4}\right)\right\}=$

k) $\left(-\frac{3}{4}+1\right)\cdot\frac{4}{3}+\frac{5}{9}:\frac{1}{3}-1=$

Las operaciones ya definidas de adición, sustracción, multiplicación y división están presentes también al trabajar con los números racionales, pero aún podemos incorporar a nuestra revisión dos operaciones más: la **potenciación** y la **radicación**.

Dado un número racional a y un número natural n, llamamos **potencia enésima** de a al número que se obtiene de multiplicar a por sí mismo tantas veces como indique n.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Esta expresión se lee "a elevado a la n". El número a se denomina **base** y n recibe el nombre de **exponente**.

$$\text{exponente} \leftarrow\; a^n = b \longrightarrow \text{potencia}$$
$$\downarrow$$
$$\text{base}$$

Por ejemplo: $2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 \;\Rightarrow\; 2^4 = 16$

Como la potenciación indica el producto de n veces un mismo factor, para su cálculo aplicaremos la regla de signos de la multiplicación. Por ejemplo:

$$(-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) \;\Rightarrow\; (-1)^3 = -1$$

Veamos qué ocurre al efectuar el cálculo de otras potencias:

POTENCIA	BASE	EXPONENTE	RESULTADO
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$	Positiva	Par	Positivo
$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$	Negativa	Par	Positivo
$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	Positiva	Impar	Positivo
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$	Negativa	Impar	Negativo

Si bien no hemos realizado una demostración formal, podemos observar que **la potencia solo es negativa cuando la base es negativa y el exponente impar**. Esta observación se puede generalizar a cualquier potencia.

Asociada a la potencia, definimos su operación inversa, la que recibe el nombre de "**radicación**".

> Dado un número racional a y un n natural, llamamos **raíz enésima de** a al número b que, elevado a la n nos da a, exceptuando el caso en el que $a < 0$ y n par.

En símbolos:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \Leftrightarrow \qquad b^n = a$$

Donde $\sqrt{\ }$ es el operador **radical,** a es el **radicando y** n es el **índice de la raíz**.

Por ejemplo: $\sqrt[4]{16} = 2$ pues $2^4 = 16$

$$\sqrt[3]{(-1)} = -1 \text{ pues } (-1)^3 = -1$$

La introducción de los números fraccionarios soluciona el problema de la división no exacta, pero la operación de radicación presenta un nuevo inconveniente.

Si el resultado de la radicación se puede expresar como cociente de dos enteros, diremos que la radicación se puede realizar en el conjunto de los números racionales.

Por ejemplo: $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

Actividad 4

Calcular las siguientes potencias y raíces:

a) $3^3 =$ b) $3^2 =$ c) $(-3)^3 =$ d) $(-3)^2 =$

e) $\sqrt{\dfrac{16}{25}} =$ f) $\sqrt[3]{-8} =$ g) $\sqrt[3]{8} =$ h) $\sqrt{\dfrac{1}{49}} =$

Pero esto no siempre es posible:

- Un número con infinitas cifras decimales no periódicas no puede ser transformado en un cociente de enteros.

- Las raíces no exactas como $\sqrt{2}$ no se pueden expresar como un cociente de enteros y, por lo tanto, no es un número racional.

Estas observaciones nos llevan a definir un nuevo conjunto numérico: los números **irracionales.**

4. Números irracionales

*Los números **irracionales** son aquellos que no pueden expresarse como un cociente de enteros y su expresión decimal es infinita no periódica.*

Ejemplos de algunos números irracionales:

- Número π que corresponde a la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro:

$$\pi = 3{,}1415926535...$$

- Número e base de los logaritmos naturales o neperianos:

$$e = 2{,}7182818284...$$

- $\sqrt{2}$ es la medida de la diagonal de un cuadrado de lado igual a la unidad:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\,...$$

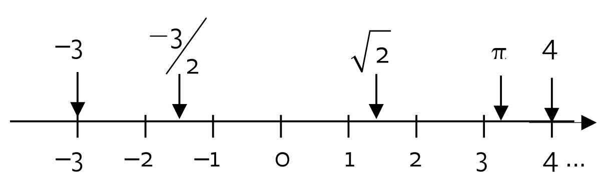
Podríamos seguir dando ejemplos de números irracionales, pero lo importante es saber que lo que los caracteriza es que no pueden expresarse como cociente de enteros.

Ahora, si consideramos los distintos tipos de números revisados hasta aquí, obtenemos el conjunto numérico más importante con el cual se trabaja de manera habitual: el de los llamados números **reales**.

5. Números reales

*El conjunto de los números **reales** está formado por los números racionales y los números irracionales y se denota por $\mathbb{R}$.*

Los números reales “llenan” por completo la **recta numérica**, por eso se la llama recta real. A cada punto de la recta le corresponde un número real; y a cada número real, un punto en la recta.



Antes de continuar con las operaciones, y como complemento de los conceptos ya enunciados, revisemos las **relaciones de orden** en los reales y el concepto de **valor absoluto**.

5.1. Relaciones de orden en los reales

La idea de comparación en Matemática exige rigurosidad y establece, entre otras cosas, lo que se da en llamar **relaciones de orden** en el conjunto de los números reales.

Recordemos cuál es la simbología utilizada para expresar la relación de orden entre dos números:

- Para describir la relación de orden entre 2 y 2 usamos: $2 = 2$
- Para describir la relación de orden entre 3 y 7 usamos: $3 < 7$
- Para describir la relación de orden entre -1 y -5: $-1 > -5$

Estas relaciones están basadas en el orden natural de los números reales en la recta numérica. Esto es: si a está a la izquierda de b en la recta numérica, entonces $a < b$; si a está a la derecha de b en la recta numérica, entonces $a > b$; y si a y b están en la misma posición, entonces $a = b$.

Diremos entonces que: Dados a y b, números reales, se verifica **alguna** de las siguientes relaciones entre ellos:

a) a es igual a b, en símbolos: $a = b$
b) a es menor que b, en símbolos: $a < b$
c) a es mayor que b, en símbolos: $a > b$

En términos matemáticos, en el primer caso estamos frente a una **igualdad**, mientras que en los otros dos casos se habla de **desigualdades.**

También habrá desigualdades que involucran la posibilidad de igualdad como se ve a continuación:

$a \leq b$ (se lee: a es menor o igual que b)

$a \geq b$ (se lee: a es mayor o igual que b)

5.2. Valor absoluto de un número real

Como ya adelantamos al introducir los números enteros, el **valor absoluto** de un número a puede interpretarse como la distancia de a al origen en la recta numérica. Pero demos otra versión del concepto de valor absoluto.

El **valor absoluto** de un número a se denota $|a|$ y se define:
si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$
si $a \leq 0$ entonces $|a| = -a$

Por ejemplo:

$|4| = 4$; pues 4 es mayor que 0.

$|-5| = -(-5) = 5$; pues -5 es menor que 0.

Por cualquiera de las dos vías conceptuales, se observa que el valor absoluto de un número es un valor no negativo.

Veamos las propiedades del valor absoluto:

- El valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores. En símbolos:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

- Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto. En símbolos:

$$|a| = |-a|$$

- El valor absoluto de la suma es menor o a lo sumo igual que la suma de los valores absolutos. En símbolos:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Actividad 5

Calcular el valor absoluto en cada caso:

a) $|7| =$ b) $|-9| =$ c) $|0| =$ d) $|3-5| =$ e) $|3| - |5| =$

5.3. Operaciones en $\mathbb{R}$

En este capítulo y en los restantes será de gran utilidad conocer las propiedades de las operaciones, motivo por el cual nuestro próximo objetivo será recordarlas y revisar su modo de aplicación.

Hemos definido los conjuntos numéricos y las operaciones algebraicas rescatando la terminología matemática apropiada para cada una de ellas. Las operaciones definidas en los racionales se extienden al conjunto de los números reales.

El siguiente cuadro resume las propiedades que se tienen presentes al sumar o multiplicar números reales.

PROPIEDADES	SUMA	PRODUCTO
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Elemento neutro	*0 es el neutro de la suma: para todo* ***a*** *real* $a + 0 = 0 + a = a$	*1 es el neutro del producto: para todo* ***a*** *real* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Elemento simétrico	*Para cada* ***a*** *real* $a + (-a) = (-a) + a = 0$	*Para cada real* ***a*** $\neq 0$ $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
Distributiva	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Notemos que la propiedad distributiva vincula las dos operaciones.

Las operaciones de potenciación y radicación de números reales requieren de un estudio más detallado.

5.3.1. Potenciación

Anteriormente definimos esta operación y sus elementos. A continuación, analizaremos algunas propiedades importantes a aplicar en la resolución de operaciones en donde se incluye la potenciación:

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN	EN SÍMBOLOS	EJEMPLO
Es **distributiva** respecto del producto.	$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2\cdot 3)^2 = 2^2\cdot 2^2$
Es distributiva con respecto a la división.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{8}{2}\right)^3 = \frac{8^3}{2^3}$
El producto de dos o más potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas.	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^2\cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
El cociente de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, cuyo exponente resulta de la diferencia entre la potencia del numerador y la del denominador.	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3$
La potencia de una potencia es igual a otra potencia de la misma base elevada al producto de los exponentes.	$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$	$(a^3)^2 = a^{3\cdot 2} = 2^6$

¿Qué sucede con el 0 en la operación de potenciación? Aquí damos un resumen. Intentemos analizar el porqué de cada afirmación:

- Toda potencia de base 0 y exponente distinto de 0 es igual a 0. En símbolos: $0^n = 0$, para n distinto de 0.
- Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1. En símbolos: $a^0 = 1$, para a distinto de 0.

El 0 como base y exponente, es decir, 0^0, **no está definido**.

Actividad 6

Resolver aplicando propiedades cuando corresponda:

a) $(5+3)^2$

b) $\left(\frac{2}{3}-1\right)^4$

c) $\frac{(3^2\cdot 2^3)^3}{6^6}$

d) $\left\{\left[(-1)^5\right]^2\right\}^3$

e) $[5(-1)+3]$

f) $(-1)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 4^3\right]$

g) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 4^3\right]^0$

h) $\left[\frac{(-4)^7}{(-4)^5}\right]\cdot(-4)$

5.3.2. Radicación

Definimos la operación de radicación como la operación inversa de la potenciación. En base a ello, calculemos las siguientes raíces:

- $\sqrt[3]{8}=2$ porque $2^3=8$
- $\sqrt[3]{-8}=-2$ porque $(-2)^3=-8$
- $\sqrt[4]{16}=2$ porque $2^4=16$
- $\sqrt[4]{-16}$ no tiene solución dentro de los reales porque no existe ningún número real que, elevado al exponente cuatro, dé como resultado un número negativo. Este caso será, como veremos luego, el motivo para crear un nuevo conjunto de números.

Establezcamos, a continuación, algunas propiedades de la radicación:

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN	**EN SÍMBOLOS**	**EJEMPLO**
Es distributiva respecto del producto.	$\sqrt[n]{a \cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4 \cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$
Es distributiva con respecto a la división.	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{512}{8}}=\dfrac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{8}}$
La raíz de índice *m* de la raíz enésima de un número real *a* es igual a la raíz de índice *m.n* de dicho número.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[2\cdot3]{64}=\sqrt[6]{64}$

Estas propiedades pueden ser ejercitadas a través de la siguiente actividad.

Actividad 7

Resolver aplicando propiedades cuando corresponda:

a) $\sqrt{16+121}=$

b) $\sqrt{2-\dfrac{7}{4}}=$

c) $\sqrt{\left(2+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{8}{5}}=$

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dfrac{1}{256}}}}=$

e) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=$

Actividad 8

Establecer la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones y justificar adecuadamente:

a) $(-2)^2$ es igual a -2^2 Verdadero-Falso

b) $(3+2)^2$ es igual a 3^2+2^2 Verdadero-Falso

c) La radicación es distributiva respecto de la suma Verdadero-Falso

5.3.3. Potencia de exponente negativo

Sabemos que $2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 factores}} = 8$, pero... ¿qué ocurre si tenemos 2^{-3}?

¿Podemos indicar que tenemos –3 factores? ¿Qué significa el exponente negativo? Para responder estos interrogantes, observemos que 2^{-3} puede ser pensado como un cociente de potencias de igual base:

$$2^{-3} = \frac{2^2}{2^5}$$

Si expresamos las potencias como productos y luego simplificamos:

$$2^{-3} = \frac{2^2}{2^5} = \frac{\cancel{2}.\cancel{2}}{\cancel{2}.\cancel{2}.2.2.2} = \frac{1}{2^3}$$

Obtenemos:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Este procedimiento se puede generalizar y, entonces, afirmamos que toda potencia de exponente negativo se puede transformar en una potencia tal que:

- la base es la inversa de la base de la potencia dada.
- el exponente es positivo y de igual valor absoluto que el exponente de la potencia dada.

En símbolos: $a^{-n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n$

5.3.4. Potencia de exponente fraccionario

Toda potencia de exponente fraccionario es igual al radical cuyo índice es el denominador del exponente (m) y cuyo radicando es la base de la potencia (a), elevada al numerador del exponente dado (n). En símbolos:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Por ejemplo: Si tenemos $16^{\frac{3}{2}}$, podemos expresarlo de una manera alternativa. El exponente fraccionario nos está indicando que 16 está sometido a la operación de potenciación con exponente 3 (el numerador de la fracción) y a la operación de radicación de índice 2 (el denominador de la fracción).

Por lo tanto:

$$16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3}$$

Resolvemos:

$$16^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{16^3} = \sqrt{4096} = 64$$

¿Qué sucede si el exponente es, además de fraccionario, negativo?

Por ejemplo: $\left(\frac{9}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Resolvemos:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

En general, toda potencia de **exponente fraccionario y negativo** es igual a la recíproca del radical, cuyo índice es el denominador del exponente fraccionario (m) y cuyo radicando es la base de la potencia (a) elevada a un exponente igual al numerador del exponente dado (n). En símbolos:

$$a^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$$

En todos estos casos especiales de la operación de potenciación, son aplicables las propiedades que hemos enunciado.

Actividad 9

Resolver los siguientes ejercicios:

a) 5^{-3} b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ c) $64^{\frac{1}{6}}$ d) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$ e) $27^{-\frac{2}{3}}$ f) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

5.3.5. Racionalización del denominador

Al resolver algunas operaciones, el resultado puede contener una raíz en el denominador.

Por ejemplo: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Podemos proponernos transformar la raíz del denominador en un número racional, obteniendo una fracción **equivalente**. En esto consiste la **"racionalización del denominador"**.

¿Cómo hacemos, en nuestro ejemplo, para transformar la fracción de manera que en el denominador se presente un número racional?

Primero, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Resolvemos en el numerador y denominador:

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{\left(\cancel{\sqrt{3}}\right)^{\cancel{2}}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Y, de esta manera, hemos transformado la raíz del denominador en un número racional, obteniendo una expresión equivalente a la original.

Veamos otro ejemplo: $\dfrac{7}{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{2}}}$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}}$

Y resolvemos:

$$\frac{7}{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{2}}}\cdot\frac{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}}}{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}}}=\frac{7\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}}}{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{2}}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{\cdot}}}=\frac{7\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}}}{\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{5}}}=\frac{7\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^{3}}}{\frac{1}{5}}$$

En general, dado:

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^{n}}}$$

Para racionalizar el denominador, debemos multiplicar numerador y denominador por:

$$\sqrt[m]{b^{m-n}}$$

porque:

$$\sqrt[m]{b^{n}}\cdot\sqrt[m]{b^{m-n}}=\sqrt[m]{b^{m}}=b$$

y b será el nuevo denominador.

Actividad 10

Racionalizar el denominador de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Actividad 11

Resolver los siguientes ejercicios combinados:

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{(5-3)^{2}-2^{8}\cdot 2^{-6}}}+2^{-1}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}-\sqrt[3]{8}\right)=$

b) $\sqrt{\dfrac{10^{2}-2^{6}}{3^{3}-2^{3}:2^{2}}}-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{2}\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{-3}\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-2}=$

c) $1-\frac{1}{7}\sqrt{3^2+(-2)^2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+(-1)^{44}\right]}=$

d) $\left[7^0+\sqrt{\frac{5^2-2^5}{-\left(2^3-3^{-2}\cdot 3^2\right)}-1}\right]^5-\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=$

e) $\sqrt{\left(2-3^0\right)}-\frac{1}{2}\cdot\left[5^2-(-3)^2\right]\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^{44}\right]}=$

En el Aula Virtual, en la sección "**Recursos y Materiales**" se encuentra la resolución detallada al ejercicio e) de esta actividad.

Nuestro trabajo se desarrollará casi exclusivamente sobre el conjunto de los números reales, pero, como anticipamos, puede ocurrir que nos encontremos con una raíz de índice par y radicando negativo. Por ejemplo, hemos observamos que $\sqrt[4]{-16}$ no está definida dentro de los reales.

Para dar solución a la radicación en este último caso, se recurre a los llamados números imaginarios y, con ellos, a los complejos.

6. Los números complejos

La **unidad imaginaria** se simboliza i y tiene la propiedad de que elevada al cuadrado da –1. Observemos que, de acuerdo a la definición:

$$i^2=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[2]{-1}=i$$

De esta manera, podremos expresar el resultado de cualquier raíz cuadrada de un número negativo. Son ejemplos de ello:

$$\sqrt{-16}=\sqrt{16}\,\sqrt{-1}=4\,i \qquad\qquad \sqrt{-15}=\sqrt{15}\sqrt{-1}=\sqrt{15}\,i$$

Como consecuencia de la aparición de los números imaginarios, se combinan linealmente números reales y números imaginarios, y así surgen los números complejos.

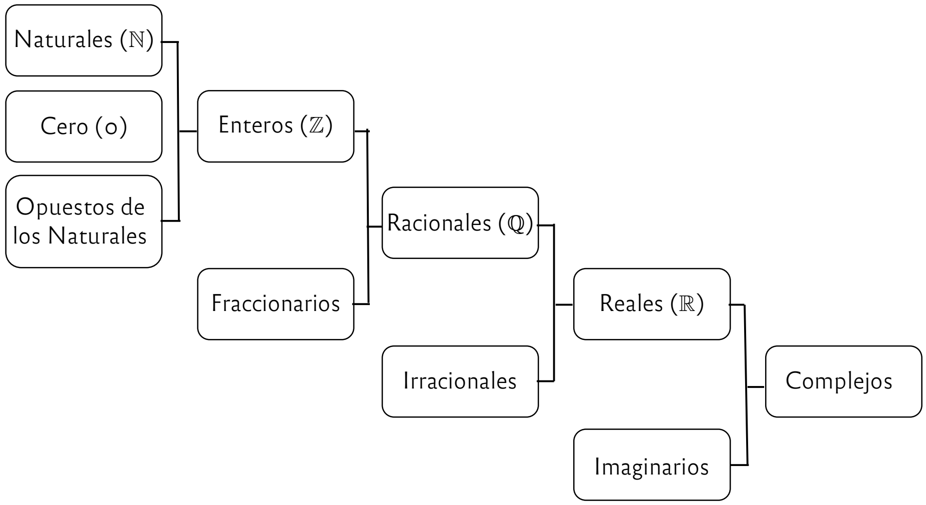
Un número se dice **complejo** si resulta de la suma de una parte real y otra imaginaria. Es decir, $\boldsymbol{z}$ es un número complejo si $\boldsymbol{z = a + b\,i}$, siendo a y b números reales. Por ejemplo:

$$3+4\,i\,,\ -5+i\,,\ 7\sqrt{2}\ -8\,i$$

Finalmente, diremos que dos números se dicen **complejos conjugados** si poseen la misma parte real y sus correspondientes partes imaginarias son de signo contrario. Si $\boldsymbol{z}$ denota un número complejo, su conjugado se simboliza $\overline{z}$. Por ejemplo:

- Si $\boldsymbol{z} = 3 + 4\,i$, entonces su conjugado es $\overline{z}=3-4\,i$
- Si $\boldsymbol{z} = 7\sqrt{2}\ -8\,i$, entonces su conjugado es $\overline{z}=7\sqrt{2}+8\,i$

A modo de síntesis, podemos resumir los conjuntos numéricos que hemos analizados de la siguiente manera:



En el Aula Virtual, en la sección "**Recursos y Materiales**", se encuentra un **resumen** del **Capítulo 1**.

7. Ejercicios integradores

Proponemos resolver los siguientes ejercicios que pretenden integrar todo lo aprendido en este capítulo.

Ejercicio 1

I. En un curso de 60 estudiantes, el 55 % tiene buenas notas, el 35 % tiene notas regulares y el resto malas notas. ¿Cuántos estudiantes obtuvieron malas notas?

II. En un colegio hay elecciones para el centro de estudiantes. Por Juan votaron 280 estudiantes, por Karina votaron 125 y por Antonio, 95. ¿Qué porcentaje obtuvo Juan del total de los votos?

Ejercicio 2

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) La suma de dos números reales es un número real.
b) La suma de dos números racionales es un número racional.
c) El producto de dos números racionales es un número racional.
d) El producto de dos números irracionales es un número irracional.
e) El producto de dos números reales es un número real.

Ejercicio 3

Resolviendo $\dfrac{3-\sqrt{25-9}}{3\cdot\sqrt{2-1}} \cdot \sqrt{(-4+8)^0}$ se obtiene:

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{5}{3}$ d) $-\frac{20}{3}$ e) 2

Ejercicio 4

Resolver:

a) Me informan que he consumido 4/9 del crédito en mi celular. Si pagué por \$180, ¿cuánto es el crédito en pesos que aún me queda?
b) Un viaje de egresados costó \$20.000 por estudiante. Juan pagó 11/25 partes del viaje en efectivo y el 45 % en 10 cuotas iguales, pero previamente se había entregado una seña al momento del contrato. ¿Cuánto fue lo que Juan pagó en efectivo, cuánto pagó en cuotas y de cuánto fue la seña?

Ejercicio 5

Resolver aplicando propiedades cuando sea posible:

a) $\left(-1+2^2\cdot 3^2\right)^{-1}\left[\left(5^3\cdot 5^{-2}\right)+2\right]\left[6^0+\left(-1\right)^0\right]=$

b) $\dfrac{\left(-1\right)^{99}}{2^{-3}\cdot 2^4}+\dfrac{\sqrt{27:3}}{\sqrt{\sqrt{256}}}=$

c) $\left[\left(1-\dfrac{5}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{2}{3}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}\,\sqrt{28}+\left(-2\right)^2\cdot 2^3-10}=$

Ejercicio 6

Completar las siguientes expresiones, indicando con el símbolo $\in$ si el número está incluido en el conjunto y con $\notin$ si no lo está.

a) 0,333........ $\mathbb{Q}$ b) 2 .... $\mathbb{Q}$ c) $\dfrac{4}{2}$ .... $\mathbb{N}$

d) $\sqrt{3}$ .... $\mathbb{Z}$ e) $\dfrac{1}{3}$ .... $\mathbb{Q}$ f) –6........... $\mathbb{N}$

Ejercicio 7

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar:

a) La suma de dos números naturales es siempre un número natural.
b) La diferencia de dos números naturales es siempre un número natural.
c) El cociente entre dos números enteros es siempre un número entero.
d) Existen infinitos números enteros entre el –5 y el 25.
e) Existen infinitos números racionales entre $1/3$ y 1.
f) La raíz cuadrada de todo número natural impar es siempre un número irracional.

Ejercicio 8

Obtener el resultado en cada caso. Se pueden dejar indicado los números irracionales y debe racionalizarse el denominador de ser necesario.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{-3}{\sqrt{10}}=$

b) $\left(\frac{3}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}=$

c) $\frac{-6+\sqrt{6^2-4\cdot3\cdot8}}{3\cdot2}=$

d) $\frac{3-\sqrt{(-3)^2-4\cdot(-2)\cdot(-2)}}{2\cdot2}=$

Ejercicio 9

Resolver los siguientes ejercicios:

a) $\sqrt{(-1)(-1)^9}+\left[\frac{3+\frac{3}{5}}{1+\frac{1}{5}}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{2+\frac{1}{4}}\right]^{-2}=$

b) $\sqrt[2]{\frac{(6)^{-1}-\frac{5}{3}}{\sqrt[3]{\frac{6}{5}-1+(-2)^2\cdot5^{-1}}}\cdot\frac{(-60)}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+\frac{2}{3}}}=$

c) $\left[-\frac{7}{2}:(-7)\right]:\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)+\left[\sqrt{3^2+1}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{\frac{6^2-3\cdot2^2}{\left(7^1-6^0\right)}}\right]\cdot(4)^{-1}=$

d) $\left[\left(1-\frac{7}{16}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{25-(-4)^2}}{5}\right]:\frac{\left[(4)^{-3}\cdot4^4\right]+\left[5^0-(-1)\right]}{\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt[3]{4}-(-2)^3}=$

e) $\left[\frac{3+\frac{3}{5}}{1+\frac{1}{5}}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)+\sqrt{2+\frac{1}{4}}\right]^{-2}=$

En el Aula Virtual se encuentra una **Autoevaluación** que recomendamos realizar.

Respuestas a las actividades y ejercicios Capítulo 1

Actividad 1

a) En este caso, podemos separar en dos términos y resolver cada uno de ellos respetando la jerarquía de las operaciones y aplicando regla de signos del producto.

$$\begin{aligned}\left[-2+(-1)\cdot(-3)\right]\cdot(-1)+3\cdot(-2)\cdot(1-2)&=\left[-2+3\right]\cdot(-1)+3\cdot(-2)\cdot(-1)\\&=1\cdot(-1)+3\cdot2\\&=-1+6=5\end{aligned}$$

b) - 5   c) 16   d) – 7   e) 3   f) 3   g) 1   h) 0

Actividad 2

a) $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$

b) $\frac{5}{4}+\frac{7}{3}=\frac{15+28}{12}=\frac{43}{12}$

c) $\frac{5}{4}-\frac{7}{3}=\frac{15-28}{12}=-\frac{13}{12}$

d) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{4+5-3}{6}=\frac{6}{6}=1$

e) $-\frac{1}{5}+2-\frac{8}{3}=\frac{-3+30-40}{15}=-\frac{13}{15}$

f) $\frac{5}{6}-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}=\frac{5-16+12}{6}=\frac{1}{6}$

Actividad 3

a) $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$

b) $-\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{3}=-\frac{35}{12}$

c) $\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}=2$

d) -1

e) $\frac{1}{7}$

f) $\frac{9}{4}$

g) $200\cdot\frac{35}{100}=70$

$\Rightarrow$ 70 es el 35 % de 200.

$400\cdot\frac{8}{100}=32$

$\Rightarrow$ 32 es el 8 % de 400.

h) Primer hermano:

$1200\cdot\frac{7}{15}=560$

Segundo hermano:

$1200\cdot\frac{5}{12}=500$

Tercer hermano:

$1200-(560+500)=140$

i) $-\frac{37}{10}$

j) $\frac{1}{4}$

k) 1

Actividad 4

a) $3^3=27$ b) $3^2=9$ c) $(-3)^3=-27$ d) $(-3)^2=9$

e) $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ f) $\sqrt[3]{-8}=-2$ g) $\sqrt[3]{8}=2$ h) $\sqrt{\frac{1}{49}}=\frac{1}{7}$

Actividad 5

a) $|7|=7$ b) $|-9|=9$ c) $|0|=0$ d) $|3-5|=2$ e) $|3|-|5|=-2$

Actividad 6

a) $(5+3)^2=64$

b) $\left(\frac{2}{3}-1\right)^4=\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

c) $\frac{\left(3^2\cdot 2^3\right)^3}{6^6}=\frac{3^6\cdot 2^9}{(3\cdot 2)^6}=\frac{3^6\cdot 2^9}{3^6\cdot 2^6}=2^{9-6}=2^3=8$

d) $\left\{\left[(-1)^5\right]^2\right\}^3=(-1)^{30}=1$

e) $\left[5(-1)+3\right]^2=(-2)^2=4$

f) $(-1)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 4^3\right]=(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4\cdot 2^6=-2^2=-4$

g) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 4^3\right]^0=1$

h) $\left[\frac{(-4)^7}{(-4)^5}\right].(-4)=(-4)^3=-64$

Actividad 7

a) $\sqrt{16+121}=\sqrt{137}$

b) $\sqrt{2-\frac{7}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{8}{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{5}}=\sqrt{4}=2$

d) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{256}}}}=\sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)^8}=\frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}=\sqrt{16}=4$

Actividad 8

a) Podemos afirmar que $(-2)^2$ es igual a -2^2. **FALSO**,

$(-2)^2=4$, pues el exponente afecta al signo menos y, por lo tanto, el resultado es positivo.

$-2^2=-4$, pues el exponente no afecta al signo menos.

b) Podemos afirmar que $(3+2)^2$ es igual a 3^2+2^2. **FALSO**

$$\left.\begin{array}{l}(3+2)^2=5^2=25\\ 3^2+2^2=9+4=13\end{array}\right\}\Longrightarrow\quad(3+2)^2\neq 3^2+2^2$$

c) La radicación es distributiva respecto de la suma. **FALSO**
Por ejemplo: $\sqrt{9+4}\neq\sqrt{9}+\sqrt{4}$

Actividad 9

a) $5^{-3}=\frac{1}{125}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\frac{25}{9}$

c) $64^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

d) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\sqrt[3]{\frac{3^3}{4^3}}=\frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac{3}{4}$

e) $27^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3^6}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

f) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3}=\sqrt{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^3}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^6}=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$

Actividad 10

a) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

Actividad 11

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{(5-3)^2-2^8\cdot 2^{-6}}}+2^{-1}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}-\sqrt[3]{8}\right)=\sqrt[12]{2^2-2^2}+2^{-1}\left(\sqrt{81}-2\right)$

$$=\sqrt[12]{0}+\frac{1}{2}(9-2)=\frac{7}{2}$$

b) $\sqrt{\dfrac{10^2-2^6}{3^3-2^3:2^2}}-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{-3}\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-2}=\sqrt{\dfrac{100-64}{27-2}}-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^{-1}\left(\dfrac{3}{7}\right)^2$

$$=\sqrt{\frac{36}{25}}+\left(\frac{3}{7}\right)=\frac{6}{5}+\frac{3}{7}=\frac{57}{35}$$

c) $1-\dfrac{1}{7}\cdot\sqrt{3^2+(-2)^2\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}+(-1)^{44}\right]}=1-\dfrac{1}{7}\cdot\sqrt{9+(-2)^2\left[3^2+1\right]}$

$$=1-\frac{1}{7}\cdot\sqrt{9+4\cdot 10}$$

$$=1-\frac{1}{7}\cdot\sqrt{49}=1-\frac{1}{7}\cdot 7=0$$

d) $\left[7^0+\sqrt{\dfrac{5^2-2^5}{-\left(2^3-3^{-2}\cdot 3^2\right)}-1}\right]^5-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}=\left[1+\sqrt{\dfrac{25-32}{-\left(2^3-1\right)}-1}\right]^5-4^2$

$$=\left(1+\sqrt{\frac{-7}{-7}-1}\right)^5-16=-15$$

En el Aula Virtual, en la sección "**Recursos y Materiales**", encontrarán la resolución detallada al ejercicio e) de esta actividad.

e) $1-4\sqrt{5}$

Respuestas de ejercicios integradores

Ejercicio 1

I. 6 alumnos obtuvieron malas notas.
II. Juan obtuvo el 56 % de los votos.

Ejercicio 2

Opción d) La afirmación: El producto de dos números irracionales es un número irracional es **falsa**. Por ejemplo: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$ (3 no es número irracional).

Ejercicio 3

Opción b)

$$\frac{3-\sqrt{25-9}}{3\cdot\sqrt{2-1}}\cdot\sqrt{(-4+8)^{0}} = \frac{3-\sqrt{16}}{3\cdot\sqrt{1}}\cdot\sqrt{1}=\frac{3-4}{3}\cdot 1=-\frac{1}{3}$$

Ejercicio 4

a) Me quedan 100 pesos de crédito.

b) En efectivo: $\frac{11}{25}\cdot 20.000=8.800$ En cuotas: $\frac{45}{100}\cdot 20.000=9.000$

Seña: $20.000-(8.800+9.000)=2.200$

Ejercicio 5

a) $$\left(-1+2^{2}\cdot 3^{2}\right)^{-1}\left[\left(5^{3}\cdot 5^{-2}\right)+2\right]\left[6^{0}+(-1)^{0}\right]=\left[-1+(2\cdot 3)^{2}\right]^{-1}(5+2)(1+1)$$

$$=(-1+36)^{-1}\cdot 7\cdot 2=\frac{1}{35}\cdot 14=\frac{2}{5}$$

b) $$\frac{(-1)^{99}}{2^{-3}\cdot 2^{4}}+\frac{\sqrt{27:3}}{\sqrt{\sqrt{256}}}=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[4]{256}}=\frac{-1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-2+3}{4}=\frac{1}{4}$$

c) $$\left\{\left(1-\frac{5}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}\sqrt{28}+(-2)^{2}\cdot 2^{3}-10}=$$

$$=\left\{\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}\cdot\sqrt{4\cdot 7}+2^{2}\cdot 2^{3}-10}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{7\cdot 2+2^{5}-10}=$$

$$=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{36}=\frac{3}{2}\cdot 6=9$$

Ejercicio 6

a) $0{,}333\in\mathbb{Q}$ b) $2\in\mathbb{Q}$ c) $\frac{4}{2}\in\mathbb{N}$ d) $\sqrt{3}\notin\mathbb{Z}$ e) $\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$ f) $-6\notin\mathbb{N}$

Ejercicio 7

a) **Verdadera**. Para cada par de números naturales, la suma se define como: agregar al primero tantas unidades como indique el segundo y, por definición de los naturales, el resultado será otro natural.

b) **Falsa**, por ejemplo 3 – 3 = 0.

c) **Falsa,** por ejemplo 3 : 2 = 1,5.

d) **Falsa**, podemos enumerar y contar una cantidad finita de números enteros entre el –5 y el 25.
e) **Verdadera**, pues entre dos racionales siempre existe otro racional, por ejemplo (1/3 + ½); luego, entre este último y 1 podremos encontrar otro racional, sumando ambos y dividiendo por 2 y así sucesivamente deducimos que existen infinitos números racionales entre 1/3 y 1.
f) **Falsa**, por ejemplo, la raíz cuadrada 1 es un número racional.

Ejercicio 8

a) $-\frac{3\sqrt{2}}{5}$ b) 6 c) $-1+\frac{\sqrt{15}}{3}i$ d) $\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i$

Ejercicio 9

a) $\frac{26}{25}$ b) 9 c) $\frac{7}{2}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{25}$