Capítulo 2

EL PROCESO DE DECISIÓN

1. Introducción

En este capítulo, trataremos de dar una caracterización general de los problemas de decisión, la cual nos resultará de utilidad al momento de analizar los diferentes modelos a estudiar en este texto.

Básicamente, un proceso de toma decisión se presenta cuando, frente a un problema, existe más de una alternativa o curso de acción posible.

En todo proceso de decisión intervienen dos actores, aunque en algunos casos la misma persona asume los dos roles:

> **Decisor:** es quien tiene el poder y la responsabilidad de ratificar una decisión y asumir sus consecuencias.
>
> **Analista:** es el encargado de estructurar el problema y ayudar al decisor a visualizarlo.

Frente a un problema de decisión, consideramos conocido el conjunto de las alternativas posibles, al que denominaremos X. Supondremos que este conjunto está formado por un número finito de elementos, a los cuales genéricamente llamaremos x_i, es decir, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, siendo *n* el número de alternativas de decisión.

Conocido este conjunto X, intentaremos establecer una relación entre los elementos del conjunto, de forma tal que para cualquier par de elementos podremos decir si uno es preferible o indiferente al otro.

Así para, $x_1 \in X \wedge x_2 \in X$, podemos establecer que x_1 es preferible a x_2:

$$x_1 \succ x_2$$

o bien que x_2 es preferible a x_1:

$$x_2 \succ x_1$$

o si ambos elementos son indiferentes entre sí:

$$x_1 \approx x_2$$

Esta relación, que llamaremos relación de preferencia, es de orden completo y se determina a través de una aplicación o función d: $X \rightarrow \Re$, conocida como "función de decisión" y a la cual simbolizaremos como d(x).

Si esta función de decisión mide algo deseable, como un beneficio o un ingreso, a los fines de seleccionar la mejor alternativa, calcularemos:

$$\text{Max } d(x)$$

y llamaremos a la o las alternativas que verifiquen ese valor "decisión óptima o decisión racional"

Por el contrario, si la función mide algo no deseable, como un costo o pérdida, con el fin de seleccionar la decisión óptima, calcularemos:

$$\text{Min } d(x)$$

2. Decisión y universo

En un problema de decisión, a menudo los resultados que se obtienen al seleccionar una alternativa se ven condicionados por la presentación de ciertos sucesos que no dependen del tomador de decisiones. Llamaremos a este conjunto de sucesos "estados de la naturaleza".

Los estados naturales representan variables exógenas cuya presentación modifica los resultados de la acción seleccionada.

Representaremos los estados de la naturaleza mediante el conjunto Y, siendo:

$$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

Supondremos que, cada vez que el decisor elige un elemento x_i del conjunto X, se presenta, un elemento particular y_j del conjunto Y, tal que el par ordenado (x_i,y_j) determina un resultado o compensación $c(x_i,y_j)$. Es decir, a cada par ordenado (x_i,y_j) le corresponde un número real $c(x_i,y_j)$, que mide el grado de satisfacción que le produce al tomador de decisiones el hecho de seleccionar una alternativa x_i cuando se presenta un estado natural y_j.

A los fines prácticos, cuando el número de elementos de los conjuntos X e Y es finito y relativamente pequeño, los resultados se pueden resumir en forma matricial. A esta matriz se la conoce con el nombre de matriz de las compensaciones o matriz de resultados y tiene una estructura como la siguiente:

	y_1	**y_2**	**. . .**	**y_m**
x_1	$c(x_1,y_1)$	$c(x_1,y_2)$	. . .	$c(x_1,y_m)$
x_2	$c(x_2,y_1)$	$c(x_2,y_2)$	. . .	$c(x_2,y_m)$
x_3	$c(x_3,y_1)$	$c(x_3,y_2)$	. . .	$c(x_3,y_m)$
...	...	...	. . .	...
x_n	$c(x_n,y_1)$	$c(x_n,y_2)$	. . .	$c(x_n,y_m)$

Tabla 1

En forma simplificada, se suelen representar las $c(x_i,y_j)$ por c_{ij}, es decir:

	y_1	**y_2**	**. . .**	**y_m**
x_1	c_{11}	c_{12}	. . .	c_{1m}
x_2	c_{21}	c_{22}	. . .	c_{2m}
x_3	c_{31}	c_{32}	. . .	c_{3m}
...	...	...	. . .	...
x_n	c_{n1}	c_{n2}	. . .	c_{nm}

Tabla 2

Como el decisor no controla el valor que asumirá y_j, no podrá seleccionar una decisión teniendo en cuenta solamente los valores de la función $c(x,y)$. Deberá contar con algunos elementos adicionales que informen sobre el comportamiento de los estados de la naturaleza y le permitan construir una función de decisión $d(x)$.

Para solucionar tales cuestiones, dependiendo de la disponibilidad de la información, se organizan los problemas de decisión en tres escenarios posibles:

- Decisiones en situación de certeza o de universo cierto
- Decisiones bajo riesgo o de universo aleatorio
- Decisiones bajo incertidumbre o de universo incierto

En estos tres escenarios coinciden autores tales como Taha (2004) y Hillier y Lieberman (2002).

3. Decisiones en situación de certeza o de universo cierto

Un escenario de certeza se da cuando quienes toman las decisiones tienen la información completa y precisa. Tales situaciones pueden ser estudiadas por medio de modelos deterministas. Estos suponen que se conoce toda la información necesaria para la toma de una decisión, por ejemplo, cuando el problema consiste en determinar el número de unidades a producir para maximizar la utilidad, conociéndose la disponibilidad de materia prima y mano de obra, como así también la utilización de estos insumos por unidad de producto.

Estos tipos de modelos son excelentes para situaciones en las que existen muchas variables endógenas y restricciones. Son útiles cuando muy pocas variables no controladas por el modelo presentan incertidumbre, por lo tanto, son ideales para la toma de decisiones internas de la organización y, en consecuencia, una gran parte de los problemas de uso corriente en las empresas pueden formularse con estas herramientas, además de que existen aplicaciones informáticas poderosas que facilitan la resolución de dichos problemas. Estos modelos pueden aplicarse a problemas tan dispares como situaciones de producción, logística, planificación de la fuerza de ventas, etcétera.

Desde el punto de vista de la presentación formal de este universo, decimos que se conoce con exactitud cuál es el estado de la naturaleza que se presentará ante determinadas circunstancias. Es decir que existe certeza de lo que ocurrirá durante el período en el cual se tomará la decisión. Por lo tanto, el decisor conoce la compensación $c(x,y)$ que obtendrá, la cual, por depender únicamente de x, puede ser tomada como función de decisión. Es decir que, en universo cierto:

$$d(x) = c(x,y)$$

Situaciones de este tipo se presentan cuando el conjunto de estados naturales (Y) está formado por un único elemento o bien, cuando estando integrado por más de un elemento, existe uno de ellos con alta probabilidad de presentación y los restantes con probabilidad muy baja o casi nula.

De esta manera, conocida la función de decisión d(x), se deberá encontrar el valor de x que la optimice, para lo cual, en el caso más sencillo –cuando el conjunto X es finito y con un número reducido de elementos–, bastará con reemplazar en d(x) cada posible valor del vector X y seleccionar como decisión óptima aquel elemento que le dé el mejor valor a d(x).

Frecuentemente, el conjunto X está formado por un número grande de elementos –o es infinito–, lo cual hace imposible seleccionar la mejor alternativa con el procedimiento anterior. En estos casos, existen métodos de cálculo –algoritmos– que permiten solucionar el problema.

4. Decisiones bajo riesgo o de universo aleatorio

Un escenario de decisiones bajo riesgo supone que la información disponible no es suficiente o puede obtenerse con cierto margen de incertezas, debiendo ser reflejada esta situación mediante una distribución de probabilidad. Por ejemplo, cuando debemos elegir cuántas unidades de un bien producir, pero no sabemos con exactitud cuál será el nivel de demanda, aunque con los registros históricos disponibles es posible construir una distribución de probabilidad.

Existe información previa que permite calcular la probabilidad de presentación de cada estado de la naturaleza.

Problemas bajo condiciones de riesgo se utilizan para una gran gama de situaciones que involucren decisiones estratégicas de la organización con su medio ambiente externo, ya que las variables generalmente no están totalmente bajo el control de los tomadores de decisiones. Por ejemplo, decisiones acerca de la localización de una planta; discernir entre construir, ampliar o cambiar de ubicación un negocio; elegir entre diferentes proyectos, entre otras.

Formalmente, decimos que, en estos casos, se conocen los estados de la naturaleza que se pueden presentar y la probabilidad de presentación que corresponde a cada estado de la naturaleza. De esta manera, surge como natural usar, como función de decisión, el valor esperado de las compensaciones ante cada decisión posible. La función de decisión d(x), entonces, es la Esperanza Matemática de las compensaciones:

$$d(x) = \underset{y}{E}\left[c\left(x_i, y_j\right)\right] = \sum c\left(x_i, y_j\right) p_j$$

siendo p_j la probabilidad del j-ésimo estado de la naturaleza.

La decisión óptima será, para el caso de que las compensaciones representen algo deseable (beneficios o ingresos):

$$\max d(x) = \max_x \underset{y}{E}\left[c\left(x, y\right)\right]$$

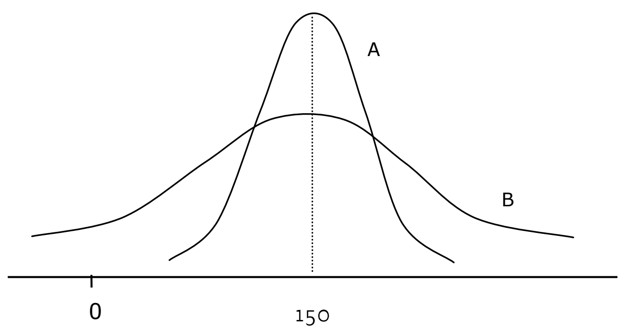
Si las compensaciones representan algo indeseable, como pérdidas o costos, la decisión óptima de acuerdo a este criterio se determina:

$$\min\ d(x) = \min_x\ \underset{y}{E}\left[c\left(x, y\right)\right]$$

Al criterio de tomar como función de decisión la Esperanza Matemática de las compensaciones se le realizan principalmente dos críticas:

- La primera plantea que, además de considerar a la Esperanza Matemática como función de decisión, debería incorporarse alguna medida de dispersión de las compensaciones, como podría ser la desviación estándar.

Esto solucionaría el problema que se presenta cuando aparecen valores semejantes de la Esperanza Matemática para más de una alternativa, situación que gráficamente podemos mostrar mediante el siguiente ejemplo hipotético de dos proyectos de inversión. Observemos que ambos presentan igual rentabilidad esperada ($150); no obstante, el proyecto B tiene mayor dispersión respecto a ese valor, pudiendo obtener rentas muy superiores e incluso entrar en pérdidas.



- La segunda crítica se refiere a que el valor de la Esperanza Matemática se vuelve significativo solamente cuando la decisión se repite un número grande de veces. Por el contrario, si la decisión debe tomarse por única vez, el criterio debe aplicarse con cautela, ya que podría conducir a una elección equivocada.

Aplicación para un caso de beneficios

Supongamos un problema de seleccionar una entre tres alternativas posibles (x_1,x_2,x_3), cuyos resultados se ven influenciados por tres sucesos (y_1,y_2,y_3) con probabilidades conocidas de presentación. En la siguiente tabla, se resumen los resultados (beneficios) de cada alternativa frente a cada estado natural y las probabilidades de presentación de estos últimos.

	y_1	**y_2**	**y_3**
x_1	150	110	100
x_2	125	95	300
x_3	120	130	250
P_j	0,3	0,5	0,2

Tabla 3

Para seleccionar la mejor alternativa, aplicamos el criterio de la Esperanza Matemática, es decir:

	y_1	**y_2**	**y_3**	$\sum \mathbf{c}(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_j)\,\mathbf{p}_j$
x_1	150	110	100	$150\,(0{,}3) + 110\,(0{,}5) + 100\,(0{,}2) = 120$
x_2	125	95	300	$125\,(0{,}3) + 95\,(0{,}5) + 300\,(0{,}2) = 145$
x_3	120	130	250	$120\,(0{,}3) + 130\,(0{,}5) + 250\,(0{,}2) = \mathbf{151}$
P_j	0,3	0,5	0,2	

Tabla 4

La decisión óptima es la alternativa x_3 por que ofrece el mayor beneficio esperado, en este caso de \$ 151.

5. Decisiones bajo condiciones de incertidumbre o de universo incierto

Un ambiente de decisión en condiciones de incertidumbre se presenta cuando no conocemos la distribución de probabilidad de los estados de la naturaleza. Para estas situaciones, existen varios métodos de elección basados en criterios racionales. Una característica distintiva de estos métodos radica en la subjetividad del criterio de decisión, lo cual es otro punto a favor de la racionalidad limitada de Simon, al menos en este tipo de metodología.

Una característica fundamental de los criterios bajo condiciones de incertidumbre se refiere a que un mismo problema, a la luz de los diferentes enfoques del análisis de decisiones, puede tener varias soluciones, lo cual es un reflejo del estilo gerencial de los decisores. No es posible decir que uno de estos criterios sea mejor que otro. Lo aconsejable, en estos casos, es que el decisor utilice el que considere adecuado, según los datos del problema y a partir de un conocimiento amplio de cómo opera cada criterio y las críticas o desventajas de cada uno.

Observe que, en este caso, no se cuenta con información previa.

5.1. Criterio de Wald o pesimismo

El principal concepto en el que se basa este modelo es evitar pérdidas elevadas o inaceptables. De esta manera, debemos colocarnos en la situación más desfavorable ante cada alternativa de decisión y luego elegir entre ellas la más favorable. En caso de beneficios, a este modelo se lo conoce como criterio *maximin*; y en caso de costos, como el criterio *minimax*.

El procedimiento puede describirse como sigue:

1. Determinar el resultado más desfavorable para cada alternativa de decisión. De esta manera, construimos la función de decisión d(x).

$$\text{Beneficios} \rightarrow d(x) = \min_{y} c\left(x_i, y_j\right)$$

$$\text{Costos} \rightarrow d(x) = \max_{y} c\left(x_i, y_j\right)$$

2. De todos estos valores, seleccionar el que nos proporcione el mejor valor para d(x). La alternativa asociada con este resultado es la estrategia que debe utilizarse o decisión óptima.

$$\text{Beneficios} \rightarrow \max d(x) = \max_{x} \min_{y} c(x_i, y_j)$$

$$\text{Costos} \rightarrow \min d(x) = \min_{x} \max_{y} c(x_i, y_j)$$

<u>Aplicación para un caso de beneficios</u>

	y_1	y_2	y_3	mín c_{ij}
x_1	150	110	100	100
x_2	125	95	300	95
x_3	120	130	250	**120**

Tabla 5

Observe que el valor 120 representa el mínimo beneficio que obtendrá si elige la alternativa x_3.

La decisión óptima es la que verifica el *maximin*, es decir, x_3.

<u>Aplicación para un caso de costos</u>

	y_1	y_2	y_3	y_4	max c_{ij}
x_1	10	18	25	12	**25**
x_2	15	5	30	8	30
x_3	10	13	20	35	35

Tabla 6

25 representa el mayor costo que obtendrá si elige la alternativa x_1.

La decisión óptima es la que verifica el *minimax*, es decir, x_1.

Las principales críticas que se le realizan a este criterio radican en la subjetividad del coeficiente de optimismo y en el hecho de que, al considerar solamente las situaciones más desfavorables que pueden presentarse y dejar de lado las restantes, en algunos casos, puede conducir a decisiones poco racionales.

Para observar esta situación, analicemos el caso hipotético de dos alternativas para seleccionar el tamaño de una nueva planta industrial, cuyos resultados dependerán de la situación económica del país en los próximos 10 años:

	Situación I	**Situación II**	$\mathbf{d(x) = min\ c(x,y)}$
Planta I	1.000.000	2.000.000	1.000.000
Planta II	500.000	25.000.000	500.000

Tabla 7

De acuerdo a este criterio, se deberá construir la planta I; sin embargo, es indudable que muchos decisores en situaciones similares no dudarían en escoger la alternativa II.

5.2. Criterio de Hurwicz o de Pesimismo Relativo

Este criterio supone que el tomador de decisiones no es completamente pesimista o totalmente optimista y que el grado de optimismo se puede medir a través de un coeficiente α que está comprendido entre 0 y 1, con lo cual el nivel de pesimismo queda definido a través de su complemento $(1 - \alpha)$.

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Usando este coeficiente, se define la función d(x) como un promedio ponderado entre el mejor y el peor resultado que corresponde a cada alternativa de decisión.

$$\text{Beneficios} \rightarrow d(x) = a \max_y c\left(x_i, y_j\right) + (1-a) \min_y c\left(x_i, y_j\right)$$

$$\text{Costos} \rightarrow d(x) = a \min_y c\left(x_i, y_j\right) + (1-a) \max_y c\left(x_i, y_j\right)$$

La decisión óptima se obtiene calculando:

$$\text{Beneficios} \rightarrow \max d(x) = \max_x \left[a \max_y c\left(x_i, y_j\right) + (1-a) \min_y c\left(x_i, y_j\right) \right]$$

$$\text{Costos} \rightarrow \min d(x) = \min_x \left[a \min_y c\left(x_i, y_j\right) + (1-a) \max_y c\left(x_i, y_j\right) \right]$$

Aplicación para un caso de beneficios (α= 0,50)

	y_1	y_2	y_3	$\alpha \max c(x,y) + (1-\alpha) \min c(x,y)$
x_1	150	110	100	(0,50) 150 + (0,50) 100 = 125
x_2	125	95	300	(0,50) 300 + (0,50) 95 = **197,5**
x_3	120	130	250	(0,50) 250 + (0,50) 120 = 185

Tabla 8

Según este criterio, la decisión óptima es x_2.

Se sugiere aplicar este criterio haciendo variar los valores de α y luego analizar los resultados.

Aplicación para un caso de costos (α= 0,50)

	y_1	y_2	y_3	y_4	$\alpha \min c(x,y) + (1-\alpha) \max c(x,y)$
x_1	10	18	25	12	(0,50) 10 + 0,50 25 = **17,5**
x_2	15	10	30	8	(0,50) 8 + 0,50 30 = 19
x_3	10	13	20	35	(0,50) 10 + 0,50 35 = 22.5

Tabla 9

Según este criterio, la decisión óptima es x_1.

Observe que si $\alpha = 0$, entonces el criterio es el de Wald; por el contrario, si $\alpha = 1$, estaremos ante un optimismo total.

La crítica al criterio de Hurwicz es similar a la realizada a Wald, pero, en este caso, se argumenta que considera solamente situaciones extremas –más y menos favorables–, perdiendo información sobre los valores intermedios de las compensaciones.

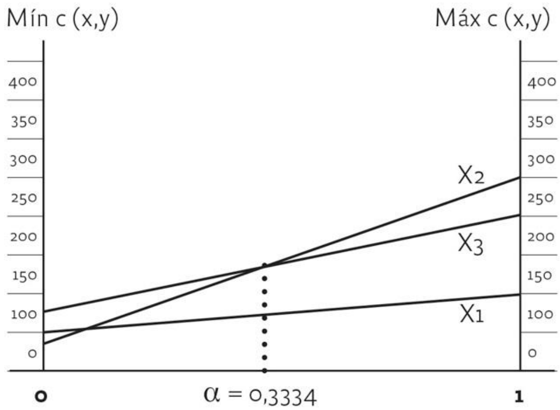
Sensibilidad del coeficiente de optimismo α

El cálculo de la sensibilidad de este coeficiente supone determinar los puntos en los cuales las alternativas son indiferentes.

Para el siguiente ejemplo, en el que las compensaciones representan beneficios, realizamos el cálculo en forma gráfica como se muestra a continuación:

	y_1	y_2	y_3	**αmáx c(x,y)+(1-α)mín c(x,y)**	**Mín C(x,y)**	**Máx C(x,y)**
x_1	150	110	100	(0.5).150+(0.5).100=125	100	150
x_2	125	95	300	(0.5).300+(0.5).95=**197.5**	95	300
x_3	120	130	250	(0.5).250+(0.5).120=185	120	250

Tabla 10



Observe que el punto de indiferencia entre las alternativas x_2 y x_3 es α=0.3334. Para valores superiores la alternativa x_2 es preferible a x_3, también podemos observar que x_1 nunca sería elegida bajo el criterio de Hurwicz.

5.3. Criterio de Savage o del Mínimo Arrepentimiento

Savage pone en duda si realmente las compensaciones c(x,y) miden la satisfacción que le produce a un individuo tomar una decisión y que se presente determinado suceso. Frente a esto, postula una nueva forma de medir el grado de satisfacción a través de lo que "deja de ganar por no haber elegido la alternativa correcta frente a ese estado natural". Bajo este concepto, se construye una nueva matriz –a partir de la matriz de compensaciones–. Denominada R (de los lamentos o arrepentimiento[1]),

[1] *Regret* en inglés.

muestra los costos de oportunidad de no haber seleccionado la mejor decisión ante cada posible estado de la naturaleza. Para elegir la mejor alternativa, Savage aconseja aplicar el criterio de Wald para costos a la matriz R.

Cada elemento r_{ij} de la matriz de los lamentos, se calcula como:

Beneficios $\Rightarrow$ r_{ij}=máximo beneficio de la columna – beneficio considerado

Costos $\Rightarrow$ r_{ij} = costo considerado – mínimo costo de la columna

Es decir:

$$\text{Beneficios} \rightarrow r(x_i, y_j) = \max_x c(x_i, y_j) - c(x_i, y_j)$$
$$\text{Costos} \rightarrow r(x_i, y_j) = c(x_i, y_j) - \min_x c(x_i, y_j)$$

Obsérvese que, en este modelo, quien toma las decisiones busca evitar pérdidas elevadas de oportunidad a través de un análisis *minimax* de la matriz de arrepentimientos. Al hacer esto, se minimiza la diferencia máxima que puede ocurrir entre la mejor alternativa para un estado de la naturaleza determinado y cada uno de los resultados, es decir que se asegura minimizar el arrepentimiento máximo o costo de oportunidad.

$$\text{Beneficios o pérdidas} \rightarrow d(x) = \max_y r(x_i, y_j)$$

La decisión óptima será:

$$\text{Beneficios o pérdidas} \Rightarrow \operatorname*{Min}_x\ d(x) = \min_x \max_y\ r(x_i, y_j)$$
$$\text{Beneficios} \rightarrow \max d(x) = \max_x \min_y\ c(x_i, y_j)$$
$$\text{Costos} \rightarrow \min d(x) = \min_x \max_y\ c(x_i, y_j)$$

<u>Aplicación para un caso de beneficios</u>

Matriz de compensaciones

	y_1	y_2	y_3
x_1	150	110	100
x_2	125	95	300
x_3	120	130	250

Tabla 11

Para obtener la matriz R se debe trabajar sobre las columnas de la matriz de compensaciones.

Matriz R

	y_1	y_2	y_3	$\max r(x_i, y_j)$
x_1	0	20	200	200
x_2	25	35	0	**35**
x_3	30	0	50	50

Tabla 12

Observemos que, aplicando Wald para pérdidas, la decisión óptima es x_2.

<u>Aplicación para un caso de costos</u>

Matriz de compensaciones

	y_1	y_2	y_3
x_1	10	18	25
x_2	15	10	30
x_3	10	13	20

Tabla 13

Matriz R

	y_1	y_2	y_3	$\max r(x_i, y_j)$
x_1	0	8	5	8
x_2	5	0	10	10
x_3	0	3	0	**3**

Tabla 14

Observe que la decisión óptima, independientemente del tipo de compensación (beneficios o costos), siempre se obtiene aplicando mínimax.

Nuevamente, se aplica Wald para pérdidas y obtenemos, en este caso, que x_3 es la decisión óptima.

5.4. Criterio de Laplace y Lagrange

Basándose en el principio de la razón insuficiente, este criterio le asigna igual probabilidad de presentación a cada estado de la naturaleza. De esta manera, si *m* es el número de estados naturales, la probabilidad de presentación de cada uno de ellos será $1/m$. Luego, utilizando estas probabilidades, se procede de igual manera que en un universo aleatorio.

Es decir, la función de decisión será:

$$\text{Beneficios o costos} \rightarrow d(x) = \underset{y}{E}\left[c\left(x,y\right)\right]$$

Mientras que la decisión óptima para este criterio se calcula como:

$$\text{Beneficios} \rightarrow \max d(x) = \max_{x} \underset{y}{E}\left[c\left(x,y\right)\right]$$

$$\text{Costos} \rightarrow \min d(x) = \min_{x} \underset{y}{E}\left[c\left(x,y\right)\right]$$

Aplicación para un caso de beneficios

	y_1	y_2	y_3	$(1/m)\sum c_{ij}$
x_1	150	110	100	(1/3) 360 = 120
x_2	125	95	300	(1/3) 520 = **173,33**
x_3	120	130	250	(1/3) 500 = 166,66

Tabla 15

La decisión óptima es x_2.

Aplicación para un caso de costos

	y_1	y_2	y_3	y_4	$(1/m)\sum c_{ij}$
x_1	10	18	25	12	(¼) 65 = 16,25
x_2	15	5	30	8	(¼) 58 = **14,50**
x_3	10	13	20	35	(¼) 88 = 22

Tabla 16

La decisión óptima es seleccionar la alternativa x_2.

Una de las críticas a este criterio se basa en el grado de subjetividad al considerar como igualmente probables a todos los estados naturales. En ese sentido, podría el decisor asignar diferentes probabilidades a los estados naturales basándose en su experiencia, conocimientos previos o intuición, por ejemplo.

Asimismo, se hacen extensivas las mismas críticas que las realizadas a la utilización del valor esperado.

6. Árboles de decisión

Esta técnica es útil para resolver determinados problemas de decisión bajo condiciones de riesgo. Un árbol de decisión es una forma gráfica y analítica de representar todos los eventos (sucesos) que pueden surgir a partir de una decisión asumida en cierto momento. Permite desplegar visualmente un problema y organizar el trabajo de cálculos que deben realizarse, y ayuda a tomar la mejor decisión desde un punto de vista probabilístico ante un abanico de posibles decisiones.

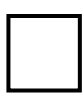
Tiene la característica de que se elige todo un plan de acciones sucesivas a lo largo del tiempo, en el que, en cada una de las etapas o puntos de decisión, se tienen diferentes alternativas y cada una de estas tiene eventos asociados con probabilidades concretas.

Elegir la mejor alternativa consiste en elegir la decisión de mayor valor ponderado, en el caso de representar beneficios, a lo largo de una ruta de decisiones adyacentes, como producir o comercializar, construir o ampliar una planta, elegir entre diferentes proyectos de inversión, etcétera.

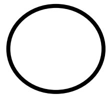
Debemos mencionar, sin embargo, que visualizar eventos futuros asociados a decisiones presentes es una cuestión sumamente compleja, más aún cuando una decisión involucra muchas alternativas de decisión en el tiempo.

6.1. Conceptos básicos

- **Nodo de decisión:** Indica la necesidad de tomar una decisión en ese momento del proceso. Se representa por un cuadrado.



- **Nodo de probabilidad:** Indica que, en ese punto del proceso, ocurre un evento aleatorio. Está representado por un círculo.



- **Rama:** Nos muestra los distintos caminos que se pueden emprender cuando tomamos una decisión o bien ocurre algún evento aleatorio.

6.2. Pasos para el análisis del árbol de decisión

1. Definir el problema.
2. Dibujar el árbol de decisión.
3. Asignar probabilidades a los eventos aleatorios.
4. Estimar los resultados para cada combinación posible de alternativas.
5. Resolver el problema obteniendo como solución la ruta que proporcione la política óptima.

Vamos a mostrar la operatoria de este método a través de un ejemplo sencillo. Supongamos que una compañía de seguros nos ofrece una indemnización por accidente de \$210.000.

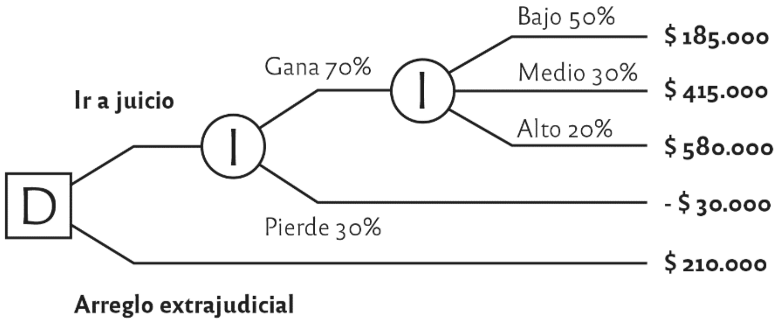
Si no aceptamos la oferta y decidimos ir a juicio, podemos obtener \$185.000, \$415.000 o \$580.000, dependiendo de los fundamentos que la justicia considere aceptables.

Si perdemos el juicio, debemos pagar las costas, que ascienden a \$30.000.

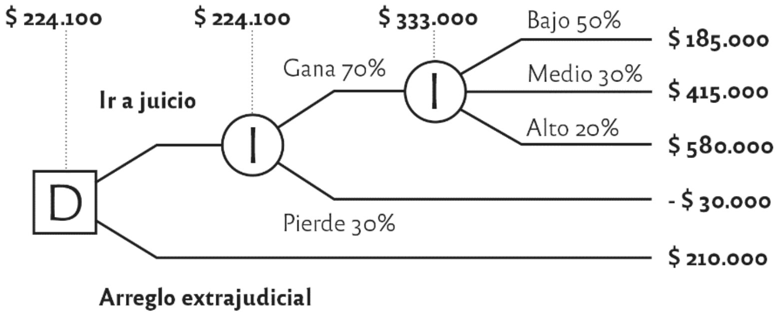
Se solicita identificar la decisión más adecuada, sabiendo que el 70 % de los juicios se gana y, de estos, en el 50 % se obtiene la menor indemnización, en el 30 %, la intermedia y en el 20 %, la más alta.
Para resolver este problema, seguimos los pasos ya indicados:

- **Paso 1.** El problema queda claramente definido en el enunciado.

- **Pasos 2 y 3.** El árbol que define este problema con las probabilidades asociadas a los eventos aleatorios es el siguiente:



- **Paso 4.** Sobre el árbol, se deberán estimar los posibles resultados frente a cada probable situación:



Observar que los valores en los nodos surgen de:

185.000(0,50) + 415.000(0,30) +580.000(0,20) = $333.000

333.000(0,70) + (- 30.000) (0,30) = $224.100

El resultado en D es el máximo entre 224.100 y 210.000.

- **Paso 5.** Analizando las rutas de decisiones posibles y sus resultados en términos de beneficios esperados, se observa que la decisión óptima será ir a juicio.

7. Decisiones bajo conflicto o Juegos de Estrategia

En este caso, se debe considerar un universo de decisión donde la ocurrencia de alguno de los estados de la naturaleza no se produce al azar, sino por la elección de un opositor inteligente que, a fin de obtener su mayor beneficio, procurará hacerle al decisor el mayor perjuicio. Problemas con estas características se conocen también como de Universo Hostil y son estudiados por la Teoría de Juegos. Esta trata sobre la toma de decisiones bajo conflicto y fue desarrollada por Von Newman y Morgenstern y descrita en su texto clásico de 1944.

Un juego incluye dos o más tomadores de decisión que buscan maximizar sus ganancias. El resultado del juego depende de las acciones que toma cada uno de los jugadores. Para analizarlos, los juegos se clasifican por el número de jugadores, por la suma algebraica de todos los pagos y por el número de estrategias o acciones posibles.

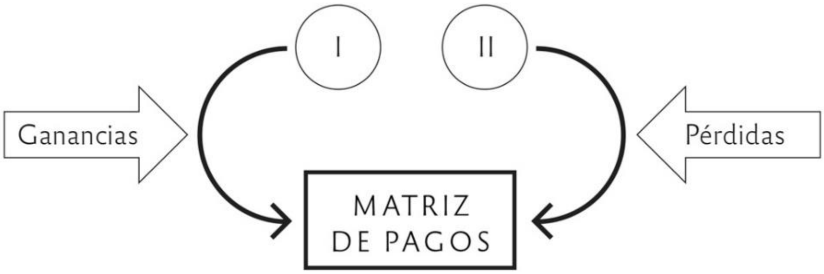
En este apartado, presentaremos un caso particular de juegos conocidos como de "dos jugadores y suma cero", esto significa que todo lo que pierde o gana un jugador lo gana o pierde el otro respectivamente.

Se asume siempre que ambos jugadores son igualmente inteligentes y racionales y que cada decisión de un jugador es efectuada con total desconocimiento de la jugada que efectúa el oponente.

Observe que esta forma de resolver el problema equivale a aplicar el criterio de Wald para ganancias para el jugador I y para pérdidas para el jugador II.

En estas circunstancias, será totalmente racional que cada jugador elija una estrategia del tipo de las presentadas por el criterio pesimista, extrayendo las peores consecuencias de cada decisión y eligiendo de entre todas ellas a la mejor.

La matriz de compensaciones, que ahora se llama matriz de pagos, se obtiene considerando al decisor como si fuera un jugador (jugador I), con todas sus alternativas, y el universo fuera reemplazado por el oponente (jugador II), representando a lo que antes eran los estados de la naturaleza con las alternativas de este último. La matriz de pagos se construye de forma tal que los pagos representan las ganancias del jugador I (cuyas alternativas corresponden a filas) y consiguientemente las pérdidas del oponente o jugador II (cuyas alternativas corresponden a columnas).



Para resolver este problema, parece lógico pensar que el jugador I elegirá el máximo de los mínimos (criterio *maximin*) y el jugador II elegirá el mínimo de los máximos (criterio *minimax*).

Si la elección hecha por ambos jugadores recae en el mismo par (x,y), diremos que el juego tiene punto de equilibrio, es decir que ambos jugadores elegirán su estrategia más conveniente y esta dará como resultado el pago que recibirá el jugador I (que también podrá ser una pérdida y entonces llevará signo negativo) por parte de su oponente (que será ganancia para este si lleva signo menos). En este caso, al valor del pago, ubicado en la intersección de la fila *maximin* y la columna *minimax*, se lo designa "valor del juego" (V), porque si ninguno comete un error siempre el juego se resolverá de esa forma, ya que le garantiza al jugador I tener como mínimo ese beneficio (mayor si su oponente se equivoca) y al jugador II tener como máximo esa pérdida (menor si el jugador I se equivoca). Al punto de equilibrio algunos autores lo llaman "punto de silla".

Veamos un ejemplo: supongamos que dos empresas competidoras tienen cada una cuatro acciones o decisiones alternativas respecto al lanzamiento de nuevos productos al mercado. La siguiente tabla resume las ganancias que obtendrá la empresa A, que a la vez resultan pérdidas para B (matriz de pagos). También se muestran los resultados de la aplicación del criterio de Wald para cada empresa, de acuerdo a lo indicado:

		Acciones de B				**$\max_x \min_y c_{ij}$**
		B I	B II	B III	B IV	
Acciones de A	A I	-12	19	4	0	-12
	A II	8	-2	5	7	-2
	A III	16	15	10	42	**10**
	A IV	-12	53	2	-26	-26
$\min_y \max_x c_{ij}$		16	53	**10**	42	

Tabla 17

Observemos que en la matriz de pagos se verifica que:

$$\max_{x} \min_{y} c_{ij} = \min_{y} \max_{x} c_{ij}$$

Por lo tanto, el juego posee punto de silla y el valor del juego (V) = 10. Decimos que a cada jugador le conviene jugar una estrategia única, que justamente es la indicada por el criterio de Wald aplicado a ambos jugadores. Cuando el juego se resuelve con una estrategia única se lo denomina “juego con estrategia pura óptima”.

Analizar qué ocurre si se selecciona una alternativa diferente a la indicada por el criterio de Wald.

Ahora bien, no todos los juegos tienen estrategia pura óptima. En ese caso, no hay un razonamiento válido que haga que cada jugador prefiera una alternativa frente a otras, dado que cada uno puede inferir la jugada del otro y cambiar en consecuencia y lo mismo puede hacer el contrario, lo que lleva a cada uno a un círculo vicioso que le impide seleccionar racionalmente una estrategia.

Veamos un ejemplo:

		Acciones de B				$\max_{x} \min_{y} c_{ij}$
		B I	B II	B III	B IV	
Acciones de A	A I	-12	19	4	0	-12
	A II	8	-2	5	7	-2
	A III	16	15	18	42	**15**
	A IV	-12	53	2	-26	-26
$\min_{y} \max_{x} c_{ij}$		**16**	53	18	42	

Tabla 18

Observemos que:

$$\max_{x} \min_{y} c_{ij} \neq \min_{y} \max_{x} c_{ij}$$

No obstante, en esta situación el juego puede ser resuelto si se admite la realización de varias jugadas (jugadas múltiples), es decir que cada jugador pueda efectuar un número grande de decisiones alternando las posibles alternativas. En estos casos, decimos que el juego es de “estrategias mixtas”.

Von Newman y Morgenstern demuestran que, en el caso de estrategias mixtas, siempre existe punto de silla y el valor de juego se obtiene cuando:

$$v = \max_x \min_y \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, p_i\, q_j = \min_y \max_x \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, p_i\, q_j$$
$$0 \le p_i \le 1 \qquad\qquad 0 \le q_j \le 1$$

El problema que se plantea es cómo seleccionar los vectores p_i y q_j.

Si bien existen técnicas para casos particulares de matriz de pagos de dimensión 2x2, para problemas de mayor dimensión, la programación lineal es una metodología que permite encontrar el valor de estos vectores.

En estas condiciones, el juego con punto de equilibrio para una sola jugada sería un caso particular en el cual hay una alternativa para cada jugador que recibe el 100 % de peso probabilístico, siendo las otras totalmente descartables, es decir, son juegos que se resuelven mediante una estrategia pura y no con combinaciones lineales de varias o todas las estrategias disponibles por cada jugador.

7.1. Solución de juegos con estrategias mixtas por programación lineal[2]

Mediante esta técnica se pueden calcular los vectores de probabilidad de cada jugador. Analicemos el caso del jugador I: para cualquier estrategia pura del competidor, las probabilidades óptimas de I se pueden calcular resolviendo el siguiente problema:

$$\max_x \left[\min \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} p_i, \sum_{i=1}^{n} c_{i2} p_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{im} p_i \right) \right]$$
$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = 1$$
$$p_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ahora bien, haciendo

$$v = \min \left(\sum_{i=1}^{n} c_{i1} p_i, \sum_{i=1}^{n} c_{i2} p_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} c_{im} p_i \right)$$

La ecuación implica que,

[2] Se aconseja al lector leer el capítulo 3 y 4 de este libro antes de abordar el estudio de este tema.

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} p_i \geq v, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Entonces, el problema para el jugador I se puede escribir:

$$\begin{aligned}
&\text{Max}(z) = v \\
&\text{sujeta a:} \\
&v - \sum_{i=1}^{n} c_{ij} p_i \leq 0 \\
&p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = 1 \\
&p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \\
&v \text{ sin restric.}
\end{aligned}$$

De la misma forma, el vector de probabilidades óptimas para el jugador II se calcula resolviendo el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned}
&\text{Min}(g) = v \\
&\text{sujeta a:} \\
&v - \sum_{j=1}^{m} c_{ij} q_j \geq 0 \\
&q_1 + q_2 + \ldots\ldots + q_m = 1 \\
&q_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \\
&v \text{ sin restric.}
\end{aligned}$$

El problema (4) es el dual de (3), razón por la cual ambos problemas optimizan la variable sin restricción *v* (valor del juego).

7.2. Ejemplo de aplicación

Para el ejemplo de la tabla 17, el modelo lineal que permite obtener las probabilidades óptimas del jugador A es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{Max}(z) = v \\
&\text{sujeta a:}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&v + 12p_1 - 8p_2 - 16p_3 + 12p_4 \le 0 \\
&v - 19p_1 + 2p_2 - 15p_3 - 53p_4 \le 0 \\
&v - 4p_1 - 5p_2 - 18p_3 - 2p_4 \le 0 \\
&v \qquad\quad - 7p_2 - 42p_3 + 26p_4 \le 0 \\
&\quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\
&p_1, p_2, p_3, p_4 \ge 0 \\
&v \text{ sin restricción de signo}
\end{aligned}
$$

La solución óptima es:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 0 \\
p_2 &= 0 \\
p_3 &= 0{,}9848 \\
p_4 &= 0{,}0152 \\
v &= 15{,}578
\end{aligned}
$$

El programa lineal del jugador B es:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min}(g) = v \\
&\text{sujeta a:} \\
&v + 12q_1 - 19q_2 - 4q_3 \qquad\quad \ge 0 \\
&v - 8q_1 + 2q_2 - 5q_3 - 7q_4 \ge 0 \\
&v - 16q_1 - 15q_2 - 18q_3 - 42q_4 \ge 0 \\
&v + 12q_1 - 53q_2 - 42q_3 + 26q_4 \ge 0 \\
&\quad q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1 \\
&q_1, q_2, q_3, q_4 \ge 0 \\
&v \text{ sin restricción de signo}
\end{aligned}
$$

La solución óptima es:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 0{,}5758 \\
q_2 &= 0{,}4242 \\
q_3 &= 0 \\
q_4 &= 0 \\
v &= 15{,}578
\end{aligned}
$$

Caso del juego piedra, papel, tijera

Veamos qué sucede con el conocido juego de piedra, papel y tijera, suponiendo que cada jugador gana o pierde $1.

La matriz de pagos es la que se presenta en la tabla:

A \ B	PI	PA	TI
PI	0	-1	1
PA	1	0	-1
TI	-1	1	0

Tabla 19

Podemos observar que, en este caso, no existe una estrategia pura óptima, por lo que A debe elegir un vector de probabilidades que represente cuántas veces jugará cada estrategia, es decir, debe elegir p_1, p_2 y p_3.

El valor esperado de A para cada estrategia que juegue B será:

Elección de B	Recompensa de A por cada elección de B
PI	$0p_1 + 1p_2 - 1p_3 = p_2 - p_3$
PA	$-1p_1 + 0p_2 + 1p_3 = -p_1 + p_3$
TI	$1p_1 - 1p_2 + 0p_3 = p_1 - p_2$

Tabla 20

B elegirá una estrategia tal que el valor esperado de A sea el mínimo posible.

Viéndolo en la matriz de pagos:

A \ B	PI	PA	TI
PI	0	-1	1
PA	1	0	-1
TI	-1	1	0
Min	$p_2 - p_3$	$-p_1 + p_3$	$p_1 - p_2$

Tabla 21

Por lo tanto, A debe elegir una estrategia tal que el mínimo de sus valores esperados sea el máximo posible. Si llamamos *v* a ese valor máximo posible, entonces este debe ser tal que cumpla con:

$$v \le p_2 - p_3$$
$$v \le -p_1 + p_3$$
$$v \le p_1 - p_2$$

Con todo lo anterior, A puede plantear un PL para averiguar cuál es ese máximo valor posible de v, considerando también que como p_1, p_2 y p_3 representan probabilidades, entonces su suma debe ser igual a 1.

Quedando el PL:

$$\begin{aligned} &\text{Max } v \\ &\text{sujeta a:} \\ &v \le p_2 - p_3 \\ &v \le -p_1 + p_3 \\ &v \le p_1 - p_2 \\ &p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ &p_1, p_2 \text{ y } p_3 \ge 0 \text{ y } v \text{ número real} \end{aligned}$$

Resolviendo el programa:

v = \$1,00

$p_1 = 1/3$

$p_2 = 1/3$

$p_3 = 1/3$